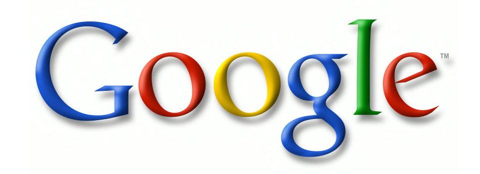
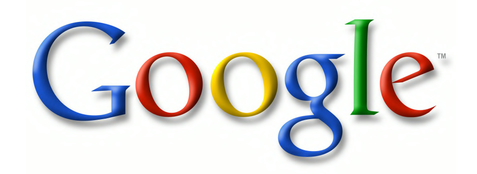





Hosted by Google

Alexander Ziwet

DIE

THEORIE DER EBENEN KURVEN

DRITTER ORDNUNG.

AUF SYNTHETISCH-GEOMETRISCHEM WEGE

ABGELEITET

VON

DR. HEINRICH SCHROETER,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorrede.

Die zahlreichen und vielseitigen seit langer Zeit angestellten Untersuchungen über die ebenen Kurven dritter Ordnung von Newton, Maclaurin, Cramer, Plücker, Salmon, Cayley, Sylvester, Hesse, Aronhold, Clebsch, Poncelet, Chasles, Jonquières, Moebius, Graßmann, Steiner, Cremona, Battaglini u. v. a., denen sich neuere Untersuchungen nach verschiedenen Richtungen hin anschließen von Hart, Em. Weyr, P. Serret, Milinowski, Küpper, Durège, Schoute, Reye, Sturm, Zeuthen, Harnack u. a., finden sich zumeist als Monographien in den verschiedensten wissenschaftlichen Zeitschriften zerstreut und sind bisher nur in wenigen größeren Werken zusammengefaßt, welchen die analytisch-geometrische Methode der Behandlung zu Grunde gelegt wird. Dies ist der Fall sowohl in dem Werke von G. Salmon: A treatise on the higher plane curves (Dublin 1852), deutsch bearbeitet von W. Fiedler: Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven (Leipzig 1873), als auch in dem von H. Durège herausgegebenen Werke: Die ebenen Kurven dritter Ordnung (Leipzig 1871), obwohl in letzteres mehrfach auch synthetische Betrachtungen eingeflochten sind, während das auf synthetischer Grundlage entwickelte Werk von L. Cremona: Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane (Bologna 1862) die Kurve dritter Ordnung nur als ein Beispiel für die vorausgehende allgemeine Theorie behandelt.

Es erschien wünschenswert für diejenigen, welche zuerst an das Studium der Kurven dritter Ordnung herantreten ohne andere Hilfsmittel, als die Bekanntschaft mit den Elementen der synthetischen Geometrie und den Haupteigenschaften der Kegelschnitte, eine naturgemäß sich anschließende und einheitliche rein synthetische Darstellung jener höheren geometrischen Gebilde mit ihren hauptsäch-

lichsten und charakteristischen Eigenschaften aus den verschiedenen Erzeugungsweisen derselben abzuleiten, wozu hinreichend Vorarbeiten vorhanden waren.

Der Versuch einer solchen Darstellung wurde von dem Verfasser zuerst in einer Vorlesung an der hiesigen Universität gemacht und führte dann zu der vollständigeren Ausarbeitung des vorliegenden Buches. Die darin gewonnenen Resultate, welche verschiedenen Zeiten und verschiedenen Urhebern angehören, sind zum großen Teil schon Gemeingut der Wissenschaft geworden; die weniger bekannten Quellen, aus welchen die Darstellung schöpfte, sind an betreffender Stelle angegeben. Rücksichtlich der etwa fehlenden Litteraturangaben mag auf die oben genannten Werke von Salmon, Cremona und Durège verwiesen werden, sowie auf die kürzlich erschienene historische Monographie von Gino Loria: Il passato e il presente delle principali teorie geometriche (Torino 1887).

Die Eigenschaften der Kegelschnitte, von welchen durchgehends der umfassendste Gebrauch gemacht wird, finden sich auseinandergesetzt in dem von dem Verfasser herausgegebenen Buche: Jacob Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie, II. Teil, „die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften“ (Zweite Auflage, Leipzig 1876); wo auf dasselbe Bezug genommen ist, wird es kurz mit „Th. d. K.“ angeführt. Der Gang der Untersuchung geht aus der folgenden kurzen Inhaltsangabe hervor:

Der Verfasser beginnt mit der Konstruktion der $C^{(3)}$ aus drei Paaren konjugierter Punkte derselben, von welcher Clebsch (Math. Ann. Bd. V, S. 422) erklärte, daß „sie an Einfachheit das Äußerste leiste“, und deren Ursprung bei einer ausgearteten $C^{(3)}$ in den Polareigenschaften des Kegelschnitts sich findet. Aus ihr entspringt die Erzeugung der $C^{(3)}$ vermittelst zweier Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halb-perspektiver Lage, wodurch eine gelegentliche Bemerkung Steiners bestätigt wird, „daß das eigentliche Wesen vieler Eigenschaften der Kurve dritten Grades vornehmlich auf der sogenannten Involution beruhe“ (Crelles Journal für r. u. a. Math. Bd. 47, S. 6: Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Kurven). Man gelangt

hiernach ungezwungen sowohl zu der $C^{(3)}$ als Tripelkurve eines Kegelschnittnetzes, als auch zu den Chaslesschen Erzeugungsweisen vermittelst Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel oder zweier Kegelschnittbüschel in projektiver Abhängigkeit und besonderer Lage, da eine Strahleninvolution auch nur ein Büschel ausgearteter Kegelschnitte ist. Hieran reihen sich verschiedene Konstruktionen der $C^{(3)}$ aus neun willkürlich und unabhängig voneinander gegebenen Punkten, sowie der Hauptsatz (Schnittpunktsatz), welcher die Bedingung zwischen den neun Durchschnittspunkten zweier Kurven 3. O. enthält und die Konstruktion des neunten notwendigen Punktes einer Gruppe von neun associierten Punkten, von denen acht willkürlich gegeben sind.

Die Tangentenquadrupel aus drei in gerader Linie liegenden Punkten der $C^{(3)}$ liefern eine eigentümliche Konfiguration ihrer Berührungspunkte, sowie ihrer Durchschnittspunkte und zeigen den Salmonschen Satz von dem konstanten Werte des Doppelverhältnisses eines Tangentenquadrupels.

Die ursprüngliche Erzeugung der $C^{(3)}$ vermittelst zweier projektiver Strahleninvolutionen in halbperspektiver Lage führt nun zu der Einteilung der $C^{(3)}$ in ihre zwei Hauptgattungen (die einzügige und die zweizügige), sowie zu den acht verschiedenen Gestalten derselben, von denen drei der ersten und fünf der zweiten Gattung angehören unter Berücksichtigung der unendlich-entfernten Kurvenpunkte (Durège: „Über die Formen der Kurven dritter Ordnung“, Borchardts Journal f. Math. Bd. 75, S. 153). Die Bedingungen für die Erzeugung der verschiedenen Gestalten der $C^{(3)}$ werden aufgesucht. Die Betrachtung des Tangentenquadrupels aus einem Kurvenpunkte hatte schon zur konischen Polare desselben geführt; die Erweiterung derselben zeigt uns das ganze Kegelschnittnetz der konischen Polaren für sämtliche Punkte der Ebene und eröffnet den Einblick in die vielfach verschlungenen Polareigenschaften einer $C^{(3)}$ und den Zusammenhang unter den konischen und geraden Polaren mit den Polokoniken und dem begleitenden Kegelschnitt. Hier treten auch die metrischen Beziehungen auf, welche bei Cremona den Ausgangspunkt bilden, von dem er zu den Polareigenschaften der $C^{(3)}$ gelangt. Die aus-

gearteten Kegelschnitte des Netzes der konischen Polaren zeigen uns die Hessesche und Cayleysche Kurve, deren Zusammenhang schon bei der Einführung des Kegelschnittnetzes hervortrat.

Die Hessesche Kurve bietet den unmittelbaren Anlaß zur Untersuchung der Wendepunkte einer $C^{(3)}$, ihrer Konfiguration und Realität, sowie der Lagenbeziehung ihrer harmonischen Polaren. Den Schluß der Untersuchungen bilden einerseits die Steinerschen Schließungsprobleme für die $C^{(3)}$, welche nach dem Vorgange von Küpper und Schoute eine synthetische Lösung finden, und andererseits die von Steiner ohne Beweis angegebenen Eigenschaften von mehrpunktig die $C^{(3)}$ berührenden Kegelschnitten. Ausgeschlossen von der Betrachtung blieb vorläufig die Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, sowie die Büschel von Kurven dritter Ordnung.

Möge die Absicht des Verfassers, den Studierenden die vielen schönen Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung ebenso leicht zugänglich zu machen, wie die der Kegelschnitte, die Zustimmung der Fachgenossen finden, und möge zugleich den Freunden synthetisch-geometrischer Forschung auf einem noch keineswegs erschöpften Arbeitsfelde Anregung und Stoff zu eigener Untersuchung, zur Vervollständigung und Erweiterung der angestellten Betrachtungen dargeboten sein.

Schließlich bleibt mir noch übrig, meinen Freunden, Herrn Professor Dr. H. Vogt und Herrn Dr. E. Toeplitz für die bei der Korrektur mir geleistete Hilfe meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Breslau, im April 1888.

H. Schroeter.

Inhaltsverzeichnis.

Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung.

§ 1. Einleitende Betrachtung.

1. Man gelangt bekanntlich zur Erzeugung des Kegelschnitts durch zwei projektive Strahlbüschel, indem man von einem ausgearteten Kegelschnitt, nämlich einem Linienpaar, ausgeht in folgender Weise: Seien l und g die beiden das Linienpaar bildenden Geraden und nimmt man auf l zwei beliebige Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ an, welche man durch Strahlen mit einem auf g veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}$ verbindet, so erhält man in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ zwei projektive Strahlbüschel

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{x}|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}|$$

in perspektiver Lage. Ist die Beziehung derselben durch die perspektive Lage festgestellt und wird die letztere alsdann aufgehoben, so gelangt man zur Erzeugung des Kegelschnitts.

2. In ähnlicher Weise kann man von einer ausgearteten Kurve dritter Ordnung, welche aus einem Kegelschnitt und einer Geraden zusammengesetzt wird, zur Erzeugung der allgemeinen Kurve dritter Ordnung gelangen.

Sei ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ und eine Gerade g gegeben, und sei $\mathfrak{P}$ der Pol der Geraden g in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, dann wird aus dem Punkte $\mathfrak{y}$ der Geraden ein Tangentenpaar an den Kegelschnitt gehen, welches in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ berühren möge; der Strahl $|\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$, welcher beständig durch $\mathfrak{P}$ geht, wird die Gerade g in einem Punkte $\mathfrak{y}_1$ treffen, und bei der Veränderung von $\mathfrak{y}$ wird sich sowohl das Punktepaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ als auch das Punktepaar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ verändern, ersteres auf dem Kegelschnitt, letzteres auf der Geraden. Das Punktepaar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ beschreibt bekanntlich eine gerade

Punktinvolution. Das Punktepaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ liefert verbunden immer einen durch $\mathfrak{P}$ laufenden Strahl; auch umgekehrt bestimmt jeder durch $\mathfrak{P}$ gehende Strahl auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein Punktepaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, welches entweder reell oder konjugiert-imaginär sein kann.

3. Bekanntlich heißen je zwei solche Punkte $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ ein Paar konjugierter Punkte für den Kegelschnitt und besitzen außer der involutorischen Eigenschaft auch die, daß wenn irgend ein Punkt $\mathfrak{O}$ des Kegelschnitts mit $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ verbunden wird, die Strahlen

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{y}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{O}\mathfrak{y}_1|$$

den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in zwei neuen Punkten $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ schneiden, deren Verbindungslinie durch $\mathfrak{P}$ gehen muß. Wir wollen auch ein solches Punktepaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ ein Paar konjugierter Punkte nennen.

4. Werden sie mit irgend einem Punkte $\mathfrak{O}$ des Kegelschnitts verbunden, so bildet das Strahlenpaar

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{x}|, \quad |\mathfrak{O}\mathfrak{x}_1|$$

eine Strahleninvolution, welche entweder hyperbolisch oder elliptisch ist, je nachdem der Punkt $\mathfrak{P}$ außerhalb oder innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt. Jedes Strahlenpaar einer solchen Strahleninvolution trifft aber auch die Gerade g in einem Punktepaar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ der vorigen Punktinvolution.

Hieraus folgt umgekehrt, wenn wir irgend ein Punktepaar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ auf g und irgend ein Punktepaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ nehmen, daß der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y},\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1) = \mathfrak{z}$$

auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen muß; folglich muß auch der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}) = \mathfrak{z}_1$$

auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen; und es müssen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ wiederum konjugierte Punkte sein, weil $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|$ und $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1|$ in $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ den $\mathfrak{K}^{(2)}$ schneiden.

5. Ferner wissen wir aus den Polareigenschaften des Kegelschnitts, daß wenn wir auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ zwei Punktepaare



$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}'\mathfrak{x}'_1$$

nehmen, wo $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}'\mathfrak{x}'_1) = \mathfrak{P}$ ist, die beiden übrigen Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'_1$

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}', \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}'_1) = \mathfrak{y}, \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}'_1, \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}') = \mathfrak{y}_1$$

auf g, der Polare von $\mathfrak{P}$, liegen müssen und ein Paar konjugierter Punkte sind.

Ferner wissen wir, daß wenn irgend ein Punkt $\mathfrak{S}$ der Geraden g mit dem veränderlichen Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ verbunden wird, das Strahlenpaar

$$|\mathfrak{S}\mathfrak{x}|, \quad |\mathfrak{S}\mathfrak{x}_1|$$

eine Strahleninvolution beschreibt, und zwar immer eine hyperbolische, weil die beiden Strahlen

$$|g| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{S}\mathfrak{P}|$$

harmonisch getrennt werden durch das Strahlenpaar

$$|\mathfrak{S}\mathfrak{x}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{S}\mathfrak{x}_1|.$$

Ein solches Strahlenpaar schneidet den $\mathfrak{K}^{(2)}$ allemal in einem neuen Paar konjugierter Punkte.

6. Diese bekannten Polareigenschaften aus der Theorie der Kegelschnitte zeigen uns für die besondere Kurve dritten Grades, welche in einen Kegelschnitt und eine Gerade ausgeartet ist, wie dieselbe aufgelöst wird in eine unendliche Menge von Paaren konjugierter Punkte, welche verteilt liegen teils auf dem Kegelschnitt, teils auf der Geraden; aus irgend zwei Punktepaaren, mögen sie der einen oder der andern Gruppe angehören, $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$, folgt allemal durch kreuzweises Verbinden ein drittes Punktepaar

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1) = \mathfrak{z}, \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}) = \mathfrak{z}_1;$$

zwei konjugierte Punkte auf dem Kegelschnitt haben allemal die Eigenschaft, daß ihre Tangenten sich in einem Punkte der Geraden schneiden.

Jeder Punkt sowohl des Kegelschnitts wie der Geraden sendet nach sämtlichen Paaren konjugierter Punkte Strahlenpaare, welche einer und derselben ihm zugehörigen Strahleninvolution angehören.

Da durch zwei Strahlenpaare eine Strahleninvolution vollständig bestimmt ist, so erscheint unsere Kurve dritter Ordnung $C^{(3)} = [\mathfrak{K}^{(2)} g]$ als der Ort solcher Punkte $\mathfrak{X}$ in der Ebene, welche nach drei Punktepaaren, die unabhängig voneinander gegeben sind, Strahlenpaare einer Involution senden. (Wir nennen drei Punktepaare unabhängig voneinander, die nicht die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind.)

7. Nehmen wir die zu zwei konjugierten Punkten $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ zugehörigen Strahleninvolutionen, so lassen sich dieselben in Abhängigkeit voneinander setzen dadurch, daß wir immer zwei solche Strahlenpaare der beiden Involutionen einander entsprechen lassen, welche nach demselben Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ hingehen. Das Gesetz dieser Abhängigkeit tritt schon hier hervor und wird später näher untersucht werden; die Kurve $C^{(3)}$ erscheint dann als das Erzeugnis der beiden Strahleninvolutionen.

§ 2. Erzeugung der $C^{(3)}$ durch Punktepaare.

1. Nach der vorigen Betrachtung bietet sich jetzt die allgemeinere Aufgabe dar:

Es sind drei Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

in der Ebene beliebig gegeben (welche nicht die drei Paar Gegenecken eines und desselben vollständigen Vierseits sind); es soll ein Punkt $\mathfrak{X}$ von der Beschaffenheit gesucht werden, daß die drei Strahlenpaare

$$|\mathfrak{X}\mathfrak{A}|\,|\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1|, \quad |\mathfrak{X}\mathfrak{B}|\,|\mathfrak{X}\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{X}\mathfrak{C}|\,|\mathfrak{X}\mathfrak{C}_1|$$

einer und derselben Strahleninvolution angehören. Punkte von der verlangten Beschaffenheit lassen sich zunächst in großer Menge ermitteln.

Nimmt man den Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1),$$

so besitzt er offenbar die geforderte Eigenschaft, denn von ihm aus gehen zwei Strahlenpaare, die identisch in eines zu-



sammenfallen, nach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, nach $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$; das Strahlenpaar nach $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ ist also ein zweites, welches zur Bestimmung der Strahleninvolution notwendig und hinreichend ist.

2. In gleicher Weise genügt der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B})$$

der geforderten Bedingung, und hierzu treten noch die vier Punkte:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \ \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1), \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1, \ \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}), \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1, \ \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}), \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \ \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1).$$

Nennen wir die beiden neuen Punkte

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{D}, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}) = \mathfrak{D}_1,$$

so sind $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits; sie erscheinen also von jedem Punkte der Ebene aus gesehen unter drei Strahlenpaaren einer Involution, daher wird der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{C}, \ \mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{E}$$

auch der geforderten Bedingung genügen, nach $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ Strahlenpaare einer Involution zu senden. Aus demselben Grunde genügt auch der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1, \ \mathfrak{D}_1\mathfrak{C}) = \mathfrak{E}_1$$

der geforderten Bedingung.

Da aber $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind, nach welchen jeder Punkt der Ebene Strahlenpaare einer Involution sendet, da ferner auch $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ die drei Paar Gegenecken eines andern vollständigen Vierseits sind, so muß ein solcher besonderer Punkt, welcher nach $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ Strahlenpaare einer Involution sendet, auch nach $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ Strahlenpaare derselben Involution senden. Wir können also als Bedingung für die gesuchten Punkte der Ebene die ursprüngliche Forderung dahin umändern, daß wir verlangen Punkte zu ermitteln, welche nach $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ oder nach $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ oder nach $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ oder nach $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ u. s. f. Strahlenpaare einer Involution senden, indem wir immer nur solche drei Punktepaare wählen, welche

nicht die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind, weil für diese die Bedingung von selbst erfüllt wird.

3. Wir können hiernach auch die Punktepaare

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C},\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{F},\quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}) = \mathfrak{F}_1$$

und

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{G},\quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}_1$$

bestimmen und erkennen, daß solche Punkte $\mathfrak{X}$ in der Ebene, welche nach $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ Strahlenpaare einer Involution senden, auch nach $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ Strahlenpaare derselben Involution senden müssen.

Wir können also an Stelle der ursprünglichen drei Punktepaare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ drei neue Punktepaare $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ setzen; ein Punkt $\mathfrak{X}$, welcher der geforderten Bedingung genügt, muß auch der neuen Forderung der Aufgabe genügen.

4. Daß die ursprünglich gegebenen Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ selbst der Forderung für den Punkt $\mathfrak{X}$ genügen, ist eo ipso klar; denn nehmen wir für $\mathfrak{X}$ z. B. $\mathfrak{A}$, so bestimmen die beiden Strahlenpaare

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \text{ und } |\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1|;\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}| \text{ und } |\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1|$$

eine Strahleninvolution, in welcher dem fünften Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ ein bestimmter sechster, durch $\mathfrak{A}$ gehender Strahl konjugiert ist; also genügt $\mathfrak{A}$ der geforderten Bedingung und ebenso alle übrigen gefundenen Punkte.

5. Durch diese sich endlos fortsetzende netzartige Operation* gelangen wir zu immer neuen Punkten und Punktepaaren, welche der geforderten Bedingung genügen und deren Anzahl sich unbegrenzt vermehren läßt. Wir können demgemäß durch bloßes f o r t g e s e t z t e s Z i e h e n v o n g e r a d e n L i n i e n in unendlicher Menge diskret gelegene Punkte $\mathfrak{X}$ des gesuchten Ortes ermitteln und uns schon dadurch ein Bild machen von dem Verlaufe der Punkte $\mathfrak{X}$. Da hierbei die Punkte immer paarweise auftreten, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$, so wollen wir jedes solches Paar „k o n j u g i e r t e P u n k t e" des Ortes

* Vergl. A. Clebsch: „Über zwei Erzeugungsarten der ebenen Kurven dritter Ordnung", Math. Annalen, Bd. V, S. 422.



nennen, wie $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ u. s. w. (wir werden sogleich die charakteristische Eigenschaft eines Paares konjugierter Punkte kennen lernen). Wir sind zu dieser Benennung berechtigt, weil die beiden konjugierten Punkte eines Paares untereinander vertauschbar sind wegen der Vertauschbarkeit konjugierter Strahlen einer Strahleninvolution.

Wir sehen ferner aus dem obigen Prozeß, daß jeder Punkt $\mathfrak{X}$ des gesuchten Ortes die Eigenschaft besitzen muß, nicht bloß nach $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, sondern nach sämtlichen Paaren konjugierter Punkte, welche durch die obige Konstruktion gefunden werden, Strahlenpaare einer und derselben Strahleninvolution zu senden. Wir nennen diese Strahleninvolution die dem Punkte $\mathfrak{X}$ zugehörige Strahleninvolution, welche schon durch zwei Strahlenpaare bestimmt wird, von der wir aber weitere in beliebiger Menge herstellen können.

6. Haben wir in der angegebenen Weise irgend ein Paar konjugierter Punkte des Ortes

$$\mathfrak{X} \text{ und } \mathfrak{X}_1$$

ermittelt, so wird die zu $\mathfrak{X}$ zugehörige Strahleninvolution z. B. durch die Strahlenpaare

$$|\,\mathfrak{X}\mathfrak{A}\,| \text{ und } |\,\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1\,|; \quad |\,\mathfrak{X}\mathfrak{B}\,| \text{ und } |\,\mathfrak{X}\mathfrak{B}_1\,|$$

bestimmt; ziehen wir nun den fünften Strahl

$$|\,\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1\,|,$$

so muß sein konjugierter Strahl in der Strahleninvolution von $\mathfrak{X}$ aus durch den zu $\mathfrak{X}_1$ konjugierten Punkt gehen; dieser ist aber $\mathfrak{X}$ selbst, also wird dieser sechste Involutionsstrahl $|\,\mathfrak{X}\mathfrak{X}\,|$ die Tangente des gesuchten Ortes in dem Punkte $\mathfrak{X}$.

7. Wir sind hiernach im stande in jedem Punkte des gesuchten Ortes die Tangente zu konstruieren, indem wir zu fünf bekannten Strahlen einer Strahleninvolution den sechsten Involutionsstrahl ermitteln, was bekanntlich in linearer Weise geschehen kann.

Bezeichnen wir die Schnittpunkte

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{X}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{B}) = \mathfrak{a},\\ &(\mathfrak{X}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{A}) = \mathfrak{b},\\ &(\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \ \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{s}, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{b},\ \mathfrak{B}\mathfrak{a}) = \mathfrak{X}_1,\\ &(\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{s}_1, \quad (\mathfrak{A}_1\mathfrak{a},\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{b}) = \mathfrak{X},\end{aligned}$$

so ist $|\mathfrak{X}\mathfrak{s}| = t$ die Tangente in $\mathfrak{X}$ und $|\mathfrak{X}_1\mathfrak{s}_1| = t_1$ die Tangente in $\mathfrak{X}_1$, denn die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{b}|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$$

werden von $\mathfrak{X}$ aus unter einer Strahleninvolution gesehen, und ebenso werden die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{a}|,\quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{B}_1|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{a}|$$

von $\mathfrak{X}_1$ aus unter einer Strahleninvolution gesehen.

Nennen wir den Schnittpunkt der beiden Tangenten t und t_1 in den konjugierten Punkten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$

$$(t\,t_1) = \mathfrak{T},$$

so erkennen wir sofort die charakteristische Eigenschaft eines Paares konjugierter Punkte. Denn zwischen irgend fünf Punkten:

$$\mathfrak{X}\ \mathfrak{X}_1\ \mathfrak{T}\ \mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1$$

gilt immer die identische Beziehung unter den Doppelverhältnissen*:

$$1)\quad \mathfrak{X}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{X}_1\mathfrak{T}]\,.\,\mathfrak{X}_1[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{T}\mathfrak{X}]\,.\,\mathfrak{T}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1] = 1.$$

Ebenso zwischen den fünf Punkten:

$$\mathfrak{X}\ \mathfrak{X}_1\ \mathfrak{T}\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$$

die identische Beziehung

$$2)\quad \mathfrak{X}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{X}_1\mathfrak{T}]\,.\,\mathfrak{X}_1[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{T}\mathfrak{X}]\,.\,\mathfrak{T}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1] = 1.$$

---

* Der Nachweis für die Möbiussche Beziehung (Barycentr. Kalkül S. 257) kann so geführt werden:

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ irgend fünf Punkte in der Ebene, und bezeichnet man die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{d}\mathfrak{e}) = \mathfrak{a}_1,\quad (\mathfrak{c}\mathfrak{a},\ \mathfrak{d}\mathfrak{e}) = \mathfrak{b}_1,\quad (\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{d}\mathfrak{e}) = \mathfrak{c}_1,$$

so gilt für die fünf Punkte der Geraden $|\mathfrak{d}\mathfrak{e}|$ die bekannte Identität zwischen den Doppelverhältnissen

$$(\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1)\,.\,(\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1)\,.\,(\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1) = 1.$$

Wegen der beiden den Punkten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ zugehörigen Strahleninvolutionen haben wir aber:

$$\mathfrak{X}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{X}_1\mathfrak{T}] = \mathfrak{X}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{T}\mathfrak{X}_1],$$
$$\mathfrak{X}_1[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{X}\mathfrak{T}] = \mathfrak{X}_1[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{T}\mathfrak{X}];$$

daher ergiebt sich aus den Beziehungen 1) und 2) die dritte:

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1] = \mathfrak{T}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}],$$

woraus folgt, daß die drei Strahlenpaare

$|\mathfrak{T}\mathfrak{A}|$ und $|\mathfrak{T}\mathfrak{A}_1|$, $|\mathfrak{T}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{T}\mathfrak{B}_1|$, $|\mathfrak{T}\mathfrak{X}|$ und $|\mathfrak{T}\mathfrak{X}_1|$

einer Strahleninvolution angehören, also der Punkt $\mathfrak{T}$ dem gesuchten Orte angehören muß. Wir schließen hieraus:

Die Tangenten in zwei konjugierten Punkten des Ortes haben ihren Schnittpunkt selbst auf dem Orte.

Dies ist die charakteristische Eigenschaft für zwei konjugierte Punkte des Ortes.

8. Daß der gesamte Ort aller Punkte $\mathfrak{X}$ von der verlangten Beschaffenheit eine Kurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ sein wird, geht schon daraus hervor, daß wir unzählig viele gerade Linien finden können, deren jede drei Punkte des Ortes enthält. Der Nachweis, daß auf jeder beliebigen Geraden in der Ebene im allgemeinen drei Punkte des Ortes enthalten sind, wird später geliefert.

Zunächst können wir noch auf jeder Verbindungslinie zweier konjugierter Punkte, z. B. auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ noch einen dritten Punkt des Ortes ermitteln; denn wäre ein solcher irgendwo auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ vorhanden, so müßte für die ihm zugehörige Strahleninvolution der Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ ein Doppelstrahl sein; die Involution selbst müßte also eine hyperbolische sein und die beiden Doppelstrahlen müßten jedes Paar konjugierter Strahlen harmonisch trennen. Ziehen wir also

---

Projizieren wir nun diese drei Doppelverhältnisse, das erste von $\mathfrak{a}$, das zweite von $\mathfrak{b}$, das dritte von $\mathfrak{c}$ aus, so erhalten wir die Doppelverhältnisse der drei Strahlbüschel

$$\mathfrak{a}[\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{b}\mathfrak{c}] \,.\, \mathfrak{b}[\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{c}\mathfrak{a}] \,.\, \mathfrak{c}[\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = 1,$$

wo $\mathfrak{a}[\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ das Doppelverhältnis der vier Strahlen $|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{e}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|$ bedeutet u. s. w.

$|\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1|$ und suchen zu dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1)$ den zugeordneten vierten harmonischen Punkt rücksichtlich des andern Paares $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, so müßte durch diesen vierten harmonischen Punkt der zweite Doppelstrahl hindurchgehen. Machen wir dasselbe mit dem Punktepaar $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, suchen also zum Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1)$ den zugeordneten vierten harmonischen Punkt rücksichtlich des Paares $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, so müßte auch durch diesen der zweite Doppelstrahl der gesuchten hyperbolischen Strahleninvolution hindurchgehen. Die Verbindungslinie der beiden gefundenen vierten harmonischen Punkte trifft also $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ in einem Punkte $\mathfrak{T}_1$, welcher offenbar dem Orte angehört und der gesuchte dritte Schnittpunkt der Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ mit der Ortskurve ist.

Wir haben zugleich die dem Punkte $\mathfrak{T}_1$ zugehörige hyperbolische Strahleninvolution gefunden, deren einer Doppelstrahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ ist. Auf dem andern Doppelstrahl müssen daher sämtliche vierte harmonische Punkte liegen, die in gleicher Weise für jedes Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ konstruiert werden, wie vorhin für $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$. Wir erhalten dadurch den Satz:

Die festgehaltene Verbindungslinie zweier konjugierten Punkte $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ wird von sämtlichen Verbindungslinien $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$ eines veränderlichen Paares konjugierter Punkte in Punkten getroffen, zu welchen die zugeordneten vierten harmonischen Punkte rücksichtlich des Paares $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ ermittelt werden; diese vierten harmonischen Punkte liegen sämtlich auf einer geraden Linie l, die $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ in dem dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ mit der Ortskurve trifft.

9. Ist auf diese Weise der Punkt $\mathfrak{T}_1$ gefunden, so erhalten wir seinen konjugierten Punkt $\mathfrak{T}$ dadurch, daß wir in der Strahleninvolution, welche durch die Strahlenpaare

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \text{ und } |\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}| \text{ und } |\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1|$$

bestimmt wird, den konjugierten Strahl zu $|\mathfrak{A}\mathfrak{T}_1| \equiv |\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ ermitteln, d. h. die Tangente in $\mathfrak{A}$ oder $|\mathfrak{A}\mathfrak{T}|$; zweitens wird in der durch die beiden Strahlenpaare



$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}| \text{ und } |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}| \text{ und } |\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1|$$

bestimmten Strahleninvolution der konjugierte Strahl zu $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}_1| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}|$ ermittelt, d. h. die Tangente in $\mathfrak{A}_1$ oder $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}|$; der Schnittpunkt $\mathfrak{T}$ der beiden Strahlen $|\mathfrak{A}\mathfrak{T}|$ und $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}|$ ist der gesuchte konjugierte Punkt zu $\mathfrak{T}_1$.

Wir finden also das vorige Resultat (7.) wieder und ergänzen es:

Der Schnittpunkt der beiden Tangenten in zwei konjugierten Punkten des Ortes liegt selbst auf dem Orte und ist der konjugierte Punkt zu dem dritten Schnittpunkt, in welchem die Verbindungslinie der beiden konjugierten Punkte der Ortskurve noch begegnet.

Diesem dritten Schnittpunkte gehört allemal eine hyperbolische Strahleninvolution zu, deren einer Doppelstrahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ ist, während der andere Doppelstrahl l alle jene oben konstruierten vierten harmonischen Punkte enthält (8).

§ 3. Erzeugung der $C^{(3)}$ durch zwei Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage.

1. Wir haben bis jetzt Punkte und Punktepaare der Kurve $C^{(3)}$ in beliebig großer Menge ermittelt, aber jedes neugefundene Punktepaar liegt infolge des angewendeten Prozesses getrennt von den früheren Paaren; wir erhalten daher immer nur diskret liegende Punkte der Ortskurve, in denen wir auch die Tangenten konstruieren können; es fehlt uns aber noch eine Konstruktion, welche den kontinuierlichen Verlauf der Punkte der Ortskurve $C^{(3)}$ zu veranschaulichen vermag. Hierzu führt uns folgende Betrachtung:

Schneiden sich die Verbindungslinien der beiden Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ in dem Punkte

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}\mathfrak{X}_1) = \mathfrak{x}$$

und sei $\mathfrak{x}_1$ der zu $\mathfrak{x}$ zugeordnete vierte harmonische Punkt rücksichtlich des Paares $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$, also der Wert des Doppelverhältnisses



$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1\,\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1) = -1,$$

so läuft, wie wir wissen (§ 2, 8), bei Veränderung des Paares $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ der Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf einer Geraden l und beschreibt eine gerade Punktreihe; die beiden Strahlen

$$|\,\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1\,|$$

beschreiben also zwei perspektiv liegende Strahlbüschel, während die Strahlenpaare

$$|\,\mathfrak{A}\mathfrak{X}\,|,\ |\,\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}\,|,\ |\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_1\,|$$

die beiden den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zugehörigen Strahleninvolutionen beschreiben.

Die von dem Strahlenpaare $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{X}\,|$, $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1\,|$ beschriebene Strahleninvolution steht aber in engem Zusammenhange mit dem von dem einfachen Strahl $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1\,|$ beschriebenen Strahlbüschel, nämlich $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1\,|$ ist allemal der zu $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}\,|$ zugeordnete vierte harmonische Strahl rücksichtlich des Strahlenpaares $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{X}\,|$, $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1\,|$. Zu jedem Strahlenpaar der Strahleninvolution gehört ein einziger bestimmter Strahl des Strahlbüschels; aber auch umgekehrt zu jedem Strahl des Strahlbüschels ein einziges bestimmtes Strahlenpaar der Strahleninvolution; um dies zu finden, bedürfen wir nur der bekannten Aufgabe: „Für zwei konzentrisch liegende Strahleninvolutionen (deren eine hyperbolisch ist) das gemeinschaftliche Strahlenpaar zu finden“ (Th. d. K. S. 58).

Diese Abhängigkeit der beiden Gebilde (der Strahleninvolution und des Strahlbüschels) tritt noch deutlicher hervor durch folgende Hilfskonstruktion:

Denken wir uns durch $\mathfrak{A}$ einen Kegelschnitt gelegt, welcher die Tangente $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{T}\,|$ in $\mathfrak{A}$ berührt, so durchbohrt jedes Strahlenpaar $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{X}\,|$, $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1\,|$ der Strahleninvolution den Kegelschnitt in dem Punktepaar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$, und die Durchbohrungssehne $|\,\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\,|$ läuft durch einen festen Punkt $\mathfrak{P}$, durch welchen auch der Strahl $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\,|$ hindurchgeht, weil $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{T}\,|$ und $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\,|$ ein Strahlenpaar der Involution bilden. Ist p die Polare von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Hilfskegelschnitt und schneidet $|\,\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\,|$ dieselbe in $\mathfrak{z}$, so sind $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\mathfrak{P}\mathfrak{z}$ vier harmonische Punkte, folglich $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{y}\,|$, $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{y}_1\,|$, $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{P}\,|$, $|\,\mathfrak{A}\mathfrak{z}\,|$ vier harmonische Strahlen,

also auch $|\mathfrak{A}\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{z}|$ solche, mithin geht $|\mathfrak{A}\mathfrak{z}|$ durch $\mathfrak{x}_1$. Das von $|\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1|$ beschriebene Strahlbüschel $(\mathfrak{P})$ liegt mit dem von $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ beschriebenen Strahlbüschel perspektiv (der perspektive Durchschnitt ist p), und nun liefert jeder Punkt $\mathfrak{z}$ der Geraden p entsprechende Elemente der beiden Gebilde, nämlich den Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{z}| \equiv |\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ des Strahlbüschels und das Strahlenpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{y}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{y}_1|$ oder was dasselbe ist $|\mathfrak{A}\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1|$ der Strahleninvolution.

Wir reduzieren durch diese Hilfskonstruktion die Strahleninvolution $[\mathfrak{A}]$ auf ein einfaches Strahlbüschel $(\mathfrak{P})$, welches immer mit dem von $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ beschriebenen Strahlbüschel projektiv ist, wie wir auch den Hilfskegelschnitt wählen mögen. Wir nennen demgemäß auch zwei Strahleninvolutionen p r o j e k t i v, wenn die Strahlbüschel, auf welche sie reduziert werden können, projektiv sind.

Nehmen wir daher die beiden den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zugehörigen Strahleninvolutionen, so sind die Reduktionsbüschel derselben mit den von $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|$ beschriebenen Strahlbüscheln projektiv, und da diese perspektiv liegen, weil $\mathfrak{x}_1$ auf der Geraden l sich bewegt, so sind die beiden Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ selbst projektiv.

Durch diese projektive Beziehung der beiden Strahleninvolutionen wird jedem Strahlenpaar der einen ein einziges bestimmtes Strahlenpaar der andern zugeordnet, und solche entsprechende Strahlenpaare schneiden sich nicht bloß in dem einen Punktepaar $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$, sondern gleichzeitig noch in einem zweiten Punktepaar $\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1$, welche beide als konjugierte Punkte dem Orte angehören. Daß das zweite Punktepaar $\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1$ auch ein Paar konjugierter Punkte der Ortskurve ist, folgt aus der Vierseitskonstruktion (§ 2).

2. Die beiden projektiven Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ befinden sich in der eigentümlichen Lage, daß dem Strahlenpaar

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{T}|$$

das Strahlenpaar

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}|$$

entspricht, weil die beiden perspektiven Strahlbüschel $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|$ in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei

entsprechende Strahlen vereinigt haben. Es fallen also in die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider projektiven Strahleninvolutionen von zwei entsprechenden Strahlenpaaren je ein Strahl zusammen; wir bezeichnen demgemäß diese Lage als halbperspektive Lage der beiden projektiven Strahleninvolutionen und können nunmehr die Ortskurve $C^{(3)}$ auffassen als Erzeugnis zweier projektiven Strahleninvolutionen in halbperspektiver Lage, indem immer die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlenpaare zwei Punktepaare der Ortskurve $C^{(3)}$ liefern.*

Die $C^{(3)}$ wird hiernach in kontinuierlicher Weise erzeugt, indem wir ein Strahlenpaar kontinuierlich die eine Strahleninvolution durchlaufen lassen, wodurch auch das entsprechende Strahlenpaar kontinuierlich die andere durchläuft. Die oben ausgeführte Hilfskonstruktion vermittelst eines Kegelschnitts, der in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ die beiden Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{T}|$ und $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}|$ berührt, giebt uns ein bequemes Mittel an die Hand, indem wir den veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}_1$ die Gerade l kontinuierlich durchlaufen lassen, entsprechende Strahlenpaare in beliebiger Menge herzustellen und dadurch die ganze Kurve $C^{(3)}$ in ihrem Verlaufe zu konstruieren.

3. Zu dieser Erzeugung der $C^{(3)}$ durch zwei projektive Strahleninvolutionen in halbperspektiver Lage gelangen wir auch auf folgende Weise:

Gehen wir von den drei Paaren konjugierter Punkte

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

aus, so können wir ein vollständiges Vierseit bilden aus den vier Geraden

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$$

und die ganze Schar von Kegelschnitten, welche diese vier Geraden zu gemeinschaftlichen Tangenten haben. Alle Tangentenpaare aus einem festen Punkte an die Kegelschnitte einer Schar bilden bekanntlich eine Strahleninvolution, der

* Vergl. des Verfassers Abhandlung: „Über eine besondere Kurve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Kurve dritter Ordnung“. Math. Annalen, Bd. V, S. 50 flg.

insbesondere auch die drei Strahlenpaare angehören, welche von dem festen Punkte nach den drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits hingehen (von denen $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ zwei Paare sind). Ist nun $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein beliebiger Kegelschnitt der Schar, so wird das Tangentenpaar aus $\mathfrak{A}$ an denselben der Strahleninvolution angehören, welche durch die Strahlenpaare

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \text{ und } |\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}| \text{ und } |\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1|$$

bestimmt wird, und das Gleiche gilt von dem Tangentenpaar, welches aus $\mathfrak{A}_1$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ geht. Durch Veränderung desselben in der Kegelschnittschar erhalten wir also in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zwei Strahleninvolutionen, die in der Abhängigkeit voneinander stehen, daß immer entsprechende Strahlenpaare Tangentenpaare aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ an denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ der Schar sind.

4. Unter den Kegelschnitten der Schar giebt es einen und nur einen einzigen, welcher die fünfte Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ berührt; von den beiden Tangentenpaaren, welche aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ an diesen besonderen Kegelschnitt der Schar gehen, fallen zwei Strahlen in $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ zusammen. Die Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ befinden sich also in halbperspektiver Lage. Die beiden Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ befinden sich aber auch in projektiver Beziehung; denn bezeichnen wir die Gerade

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1| = a,$$

so liegen bekanntlich die Pole der Geraden a in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte der Schar auf einer Geraden a_1 und bilden eine gerade Punktreihe $\mathfrak{x}_1$, welche zu den Kegelschnitten der Schar in projektiver Abhängigkeit steht. Ist also $\mathfrak{x}_1$ der Pol von a in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$, so liegt $\mathfrak{x}_1$ auf a_1 und das Tangentenpaar aus $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ wird harmonisch getrennt durch das Stahlenpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1| = a$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$. Durchläuft $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Kegelschnittschar, so durchläuft $\mathfrak{x}_1$ die gerade Punktreihe auf a_1, und $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1|$ beschreibt ein einfaches Strahlbüschel, welches projektiv ist mit der Strahleninvolution, die von den Tangentenpaaren aus $\mathfrak{A}$ an die Kegelschnitte der Schar gebildet wird (3.). Das Gleiche gilt von der Strahleninvolution für $\mathfrak{A}_1$, und da die beiden von

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1|$$

beschriebenen Strahlbüschel perspektiv liegen, so stehen auch die beiden Involutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ in projektiver Beziehung.

Das Erzeugnis dieser beiden Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage ist nun in der That unsere Kurve $C^{(3)}$; denn sei

das Tangentenpaar aus $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$: t und t',
" " " $\mathfrak{A}_1$ " $\mathfrak{K}^{(2)}$: t_1 und t'_1

und bezeichnen wir die Schnittpunkte

$$(tt_1) = \mathfrak{X}, \quad (tt_1') = \mathfrak{Y},$$
$$(t't_1') = \mathfrak{X}_1, \quad (t_1 t') = \mathfrak{Y}_1,$$

so gehen aus $\mathfrak{X}$ zwei Strahlen t und t_1 nach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, die der Strahleninvolution angehören, welche durch die Strahlenpaare

$$|\mathfrak{X}\mathfrak{B}| \text{ und } |\mathfrak{X}\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{X}\mathfrak{C}| \text{ und } |\mathfrak{X}\mathfrak{C}_1|$$

bestimmt wird; es genügt also $\mathfrak{X}$ den Forderungen der Aufgabe (§ 2, 1.) und ebenso $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}_1$; diese Punkte gehören also dem gesuchten Orte $C^{(3)}$ an.

Die Gerade a_1 ist nichts anderes als die von uns früher mit l bezeichnete Gerade (§ 2, 8.), welche die projektive Beziehung der beiden Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ vermittelt.

Wir können also folgenden Satz aussprechen:

W e n n m a n e i n e K e g e l s c h n i t t s c h a r v o n v i e r g e m e i n s c h a f t l i c h e n T a n g e n t e n $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|$, $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ h a t, u n d m a n l e g t v o n z w e i f e s t e n P u n k t e n ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$) j e d e s m a l d i e T a n g e n t e n p a a r e a n e i n e n u n d d e n s e l b e n K e g e l s c h n i t t d e r S c h a r, s o d u r c h s c h n e i d e n s i c h d i e s e l b e n i n z w e i P u n k t e p a a r e n, d e r e n g e s a m t e r O r t f ü r a l l e K e g e l s c h n i t t e d e r S c h a r e i n e $C^{(3)}$ i s t.

Was hier für die beiden Mittelpunkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ der erzeugenden Strahleninvolutionen nachgewiesen ist, gilt in gleicher Weise für irgend ein Paar konjugierter Punkte. Es kann also dieselbe Kurve $C^{(3)}$ in der mannigfachsten Weise erzeugt werden, indem man immer nur ein Paar

konjugierter Punkte als Mittelpunkte erzeugender Strahleninvolutionen wählt und dieselben herstellt. Dies entspricht der Erzeugung des Kegelschnitts durch zwei projektive Strahlbüschel, deren Mittelpunkte man beliebig auf dem Kegelschnitt wählen kann. Hier ist die Wahl der Mittelpunkte dadurch beschränkt, daß ihre beiden Tangenten sich in einem Punkte der Kurve selbst schneiden müssen.

5. Was wir bisher für einzelne Punkte und Punktepaare unsers Ortes erkannt haben, gilt jetzt für jeden beliebigen Punkt. Denn sei $\mathfrak{X}$ ein beliebiger Punkt des Ortes, welcher also die Eigenschaft besitzt, nach $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ drei Strahlenpaare einer Involution zu senden, dann giebt es nur einen einzigen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, der die fünf Tangenten hat

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{X}|,$$

und dieser Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ muß auch die Gerade $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}|$ berühren, wegen der involutorischen Eigenschaft von $\mathfrak{X}$. Aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ gehen aber an $\mathfrak{K}^{(2)}$ noch zwei andere Tangenten außer $|\mathfrak{A}\mathfrak{X}|$ und $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}|$; jene beiden schneiden sich in $\mathfrak{X}_1$, einem neuen Punkte der Ortskurve, und das Punktepaar

$$\mathfrak{X} \text{ und } \mathfrak{X}_1$$

ist ein Paar konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ in dem früheren Sinne und mit der charakteristischen Eigenschaft, daß nunmehr ein beliebiger Punkt $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ nach $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ ein Paar konjugierter Strahlen derjenigen Strahleninvolution senden wird, unter welcher die drei gegebenen Punktepaare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ erscheinen.

In der That, der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher durch die fünf Tangenten $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|$, $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{X}|$ bestimmt wird, berührt auch $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1|$, $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_1|$, hat also acht Tangenten. Wenn $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der $C^{(3)}$ ist, so sendet er nach $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ drei Strahlenpaare einer Involution, welche schon durch zwei Strahlenpaare bestimmt wird. Dieser Involution muß das Tangentenpaar aus $\mathfrak{P}$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ angehören, also wird die Strahleninvolution $[\mathfrak{P}]$ durch dies Tangentenpaar und das Strahlenpaar $|\mathfrak{P}\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{P}\mathfrak{A}_1|$ bestimmt; folglich muß ihr auch das Strahlenpaar

$$|\mathfrak{P}\mathfrak{X}|, \quad |\mathfrak{P}\mathfrak{X}_1|$$

angehören, denn dasselbe gehört einer Involution an, die von allen Tangentenpaaren an die Kegelschnitte einer Schar gebildet wird, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten hat

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{X}|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_1|;$$

zu diesen Kegelschnitten gehört aber $\mathfrak{K}^{(2)}$. Ebenso ist auch

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{X},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_1) = \mathfrak{Y} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{X}) = \mathfrak{Y}_1$$

ein Paar konjugierter Punkte der $C^{(3)}$.

Wir haben hierdurch eine Bedingung zwischen vier (beliebigen) Paaren konjugierter Punkte gefunden, die sich folgendermaßen aussprechen läßt:

Hat man irgend vier Paare konjugierter Punkte einer $C^{(3)}$ ermittelt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$$

und zieht die Verbindungslinien

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|,$$
$$|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{D}_1|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|,$$

so berühren diese acht Geraden einen und denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$.

6. Wir haben gesehen, daß es auf $C^{(3)}$ zu jedem Punkte $\mathfrak{X}$ einen einzigen bestimmten konjugierten Punkt $\mathfrak{X}_1$ giebt, wie derselbe gefunden wird, und daß irgend ein Punkt $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ verbunden zwei Strahlen liefert, welche der $C^{(3)}$ in einem neuen Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}_1$ begegnen.

Man kann also durch Festhalten eines Paares konjugierter Punkte $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ und durch Veränderung des Punktes $\mathfrak{P}$ auf $C^{(3)}$ sämtliche Paare konjugierter Punkte in kontinuierlicher Weise erhalten. Schneidet $|\mathfrak{P}\mathfrak{X}|$ die $C^{(3)}$ zum dritten Mal in $\mathfrak{Y}$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{X}_1|$ in $\mathfrak{Y}_1$, so ist

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}) = \mathfrak{P}_1$$

der konjugierte Punkt zu

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y},\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1) = \mathfrak{P}.$$

Wenn wir von dem vollständigen Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ sind, das Paar $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ festhalten, den willkürlichen Punkt $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ aber so verändern, daß er in den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$ mit der $C^{(3)}$ hineinrückt, dann wird $\mathfrak{Y}$ nach $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{Y}_1$ nach $\mathfrak{X}$ gelangen, also werden $|\mathfrak{Y}\mathfrak{X}_1|$ und $|\mathfrak{Y}_1\mathfrak{X}|$ die Tangenten der $C^{(3)}$ in den beiden konjugierten Punkten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ werden, folglich wird der Punkt $\mathfrak{P}_1$ der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten und wir finden jetzt allgemein bestätigt den früheren Satz (§ 2, 9):

Die beiden Tangenten in zwei konjugierten Punkten der $C^{(3)}$ schneiden sich allemal in einem neuen Punkte derselben und der konjugierte Punkt zu letzterem ist der dritte Schnittpunkt der $C^{(3)}$ mit der Verbindungslinie der beiden ersten konjugierten Punkte.

Die Strahleninvolution, welche diesem dritten Schnittpunkte angehört, ist allemal eine hyperbolische, weil ein Doppelstrahl derselben die Verbindungslinie der beiden anfänglichen konjugierten Punkte ist.

§ 4. Nachweis dafür, dafs eine beliebige Gerade der $C^{(3)}$ im allgemeinen in drei Punkten begegnet.

1. Die Erzeugung der $C^{(3)}$ durch zwei Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage liefert uns nun auch den allgemeinen Nachweis dafür, daß eine beliebige Gerade g der $C^{(3)}$ im allgemeinen in drei Punkten begegnet.

Ist g eine beliebige Gerade in der Ebene, und treffen die beiden erzeugenden Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ die Gerade g in den Punktinvolutionen, deren Punktepaare

$$\mathfrak{x} \text{ und } \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{y} \text{ und } \mathfrak{y}_1$$

seien, so haben wir auf g zwei incidente Punktinvolutionen in projektiver Abhängigkeit; die Punktepaare $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ entsprechen einander eindeutig, ebenso wie die Strahlenpaare

der erzeugenden Strahleninvolutionen, mit denen sie perspektiv liegen, und es wird auf die Frage ankommen:

Wie oft ereignet es sich, daß ein Punkt des einen Paares $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ mit einem Punkte des entsprechenden Paares $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ zusammenfällt?

So oft dies eintritt, wird offenbar ein Schnittpunkt entsprechender Strahlen auf g liegen, d. h. ein Punkt der Ortskurve sein.

Von vornherein ist ersichtlich, daß dies einmal eintritt; da nämlich dem Strahlenpaar

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{T}|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1| \quad \text{das Strahlenpaar} \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}|$$

entspricht (§ 3, 2), so trifft der Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ die Gerade g in einem Punkte $\mathfrak{o}$, welcher zwei entsprechende Punkte aus den beiden Punktinvolutionen vereinigt. Dieser Punkt $\mathfrak{o}$ fällt also als nicht dem Orte $C^{(3)}$ angehörig selbstverständlich heraus. Die übrigen zusammenfallenden Punkte lassen sich aber so ermitteln:

2. Jede der beiden auf g befindlichen Punktinvolutionen läßt sich auf eine einfache gerade Punktreihe reduzieren durch ein Verfahren, welches dual gegenübersteht dem in § 3, 1 angewendeten zur Reduktion einer Strahleninvolution auf ein einfaches Strahlbüschel.

Nehmen wir nämlich einen beliebigen die Gerade g im Punkte $\mathfrak{o}$ berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ und legen aus jedem Punktepaar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ an denselben die beiden noch übrigen Tangenten, welche sich in $\mathfrak{p}$ schneiden, so wird bei der Veränderung von $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ der Ort von $\mathfrak{p}$ eine gerade Linie l, auf welcher $\mathfrak{p}$ eine gerade Punktreihe durchläuft (Th. d. K. S. 152). Diese gerade Punktreihe ist projektiv mit dem von den Polaren ihrer Punkte gebildeten Strahlbüschel, also auch mit der von dem vierten harmonischen Punkte zu $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ beschriebenen Punktreihe, welche perspektiv liegt mit dem von dem vierten harmonischen Strahl zu $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1|$ beschriebenen Strahlbüschel. Das Strahlenpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{T}|$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ liefert auf g das Punktepaar $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}$; die übrigen Tangenten aus $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_1$ müssen sich auf l schneiden, folglich muß

$$\mathfrak{o}_1 = (l\,g)$$

sein, der Schnittpunkt von l und g.

Wir haben dadurch die erste Punktinvolution $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$ auf die gerade Punktreihe $\mathfrak{p}$ (auf l) reduziert; in gleicher Weise reduzieren wir mittels desselben Hilfskegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ die zweite Punktinvolution $[\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1]$ auf eine gerade Punktreihe $[\mathfrak{p}_1]$, deren Träger eine bestimmte Gerade l_1 ist. Trifft das Strahlenpaar $|\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}\,|$ und $|\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\,|$ die g in $\mathfrak{o}'_1$ und $\mathfrak{o}$, so wird

$$\mathfrak{o}'_1 = (l_1 g)$$

sein. Die beiden von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ auf den Trägern l und l_1 durchlaufenen geraden Punktreihen sind aber projektiv, weil die Punktinvolutionen $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$ und $[\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1]$ projektiv sind (§ 3, 1), und ein besonderes Paar entsprechender Punkte dieser beiden projektiven geraden Punktreihen werden die Punkte $\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}'_1$ sein. Die Verbindungslinie je zwei entsprechender Punkte $|\,\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\,|$ muß daher einen Kegelschnitt $K^{(2)}$ umhüllen, und da auch $|\,\mathfrak{o}_1\mathfrak{o}'_1\,| = g$ eine Tangente desselben ist, so haben die beiden Kegelschnitte

$$\mathfrak{K}^{(2)} \text{ und } K^{(2)}$$

bereits eine gemeinschaftliche Tangente, mithin im allgemeinen noch drei andere, von denen mindestens eine reell sein muß, die beiden übrigen auch konjugiert-imaginär sein können.

Diese drei übrigen gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $K^{(2)}$ liefern nun die Lösungen der Aufgabe, denn sobald von dem Tangentenpaar aus $\mathfrak{p}$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ und von dem Tangentenpaar aus $\mathfrak{p}_1$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ zwei Tangenten zusammenfallen in $|\,\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\,|$, muß diese Gerade der g in einem Punkte begegnen, in welchem ein Punkt des Paares $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ mit einem Punkte des entsprechenden Paares $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ zusammenfällt. Wir schließen also das Resultat:

Eine beliebige Gerade g enthält im allgemeinen drei Punkte des Ortes $C^{(3)}$, von denen notwendig einer reell sein muß, die beiden andern auch konjugiert-imaginär sein können.

3. Wir haben hiermit zugleich eine allgemeinere fundamentale Aufgabe gelöst, deren Hervorhebung nützlich er-



scheint. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $K^{(2)}$ haben nämlich im allgemeinen vier gemeinschaftliche Tangenten, und nur infolge der besonderen halbperspektiven Lage der erzeugenden Strahleninvolutionen tritt der Umstand ein, daß eine derselben als illusorisch für die vorliegende Frage herausfällt. Wenn wir also die Bedingung der halb-perspektiven Lage fortlassen, werden wir sagen müssen:

Bei zwei Punktinvolutionen $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$ und $[\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1]$ auf demselben Träger g, in projektiver Abhängigkeit kommt es im allgemeinen viermal vor, daß ein Punkt des einen Paares $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ mit einem Punkte des entsprechenden Paares $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ zusammenfällt.

Lassen wir also für die beiden erzeugenden projektiven Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ die Bedingung der halbperspektiven Lage fallen, so wird das Erzeugnis eine Kurve vierten Grades, weil jede Gerade g im allgemeinen vier Punkte des Ortes enthält (es ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zwei Doppelpunkte derselben sein müssen), und nur für die halb-perspektive Lage fällt die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ als ein Teil dieser Kurve $C^{(4)}$ heraus, sodaß nur eine $C^{(3)}$ übrig bleibt. Nehmen wir auf demselben Träger g eine Punktinvolution und eine einfache Punktreihe in projektiver Beziehung und reduzieren, wie oben, die Punktinvolution $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$ mittels des Hilfskegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ auf eine einfache gerade Punktreihe $[\mathfrak{p}]$ auf dem Träger l, welche mit der auf g gegebenen Punktreihe $[\mathfrak{y}]$ projektiv sein wird, so erzeugen auch die projektiven Punktreihen $l\,[\mathfrak{p}]$ und $g\,[\mathfrak{y}]$ einen Kegelschnitt $K^{(2)}$, der mit $\mathfrak{K}^{(2)}$ die gemeinschaftliche Tangente g hat; die übrigen drei gemeinschaftlichen Tangenten beider Kegelschnitte liefern die incidenten entsprechenden Elemente der beiden auf g gegebenen Gebilde, also:

Sind auf demselben Träger g eine Punktinvolution $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$ und eine einfache Punktreihe $[\mathfrak{y}]$ in projektiver Abhängigkeit gegeben, so kommt es im allgemeinen dreimal vor, daß ein Punkt des Paares $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ mit dem entsprechenden Punkte $\mathfrak{y}$ zusammenfällt; von diesen drei incidenten Punkten ist immer einer

reell, die beiden andern können auch konjugiert-imaginär sein.

Die dual-gegenüberstehenden Sätze für Strahleninvolutionen besonders auszusprechen ist überflüssig.

4. Wir können nunmehr auch vollständig und allgemein die Frage beantworten, welche uns in § 2, 1 als Ausgangspunkt diente, nämlich die Frage nach dem Ort eines Punktes $\mathfrak{X}$, welcher nach drei voneinander unabhängig gegebenen Punktepaaren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

Strahlenpaare einer Involution sendet. Die involutorische Eigenschaft läßt sich nämlich aussprechen als Gleichheit der Doppelverhältnisse zweier Strahlbüschel

$$\mathfrak{X}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1] = \mathfrak{X}[\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}].$$

Nun ist der Ort eines Punktes $\mathfrak{X}$, welcher nach vier gegebenen Punkten vier Strahlen sendet, deren Doppelverhältnis einen gegebenen Wert haben soll, bekanntlich ein Kegelschnitt, welcher durch die vier gegebenen Punkte selbst hindurchgeht und vermittelst der Tangente in einem dieser Punkte konstruiert werden kann. Soll das Doppelverhältnis

$$\mathfrak{X}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = x$$

sein, so konstruiere man durch $\mathfrak{A}_1$ eine Gerade t, sodaß die vier Strahlen

$$t, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}|$$

den Wert des Doppelverhältnisses x liefern; dann ist ein Kegelschnitt vollständig bestimmt, welcher durch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ geht und in $\mathfrak{A}_1$ die Tangente t hat. Dieser Kegelschnitt ist der Ort für den gesuchten Punkt $\mathfrak{X}$. Soll nun

$$\mathfrak{X}[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{X}[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1]$$

sein, und legen wir diesen Doppelverhältnissen irgend einen Wert x bei, so wird $\mathfrak{X}$ ein gemeinschaftlicher Punkt zweier Kegelschnitte sein müssen, welche bereits $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ gemein haben. Die übrigen beiden Schnittpunkte erfüllen also die Forderung der Aufgabe. Mit der Veränderung von x verändern sich auch die beiden Kegelschnitte und beschreiben zwei Kegelschnittbüschel mit je vier festen Grundpunkten.



Diese beiden Kegelschnittbüschel stehen infolge der obigen Gleichheit in projektiver Abhängigkeit, die so hergestellt werden kann:

Seien die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{b},\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{C},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{c}$$

und

$$|\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}\ | = l,$$

und lassen wir auf l einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ laufen, der eine gerade Punktreihe beschreibt, so findet offenbar die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt

$$\mathfrak{A}\,[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{x}] = \mathfrak{A}_1\,[\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{x}];$$

legen wir nun durch

$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ einen Kegelschnitt $K^{(2)}$, der $|\ \mathfrak{A}\mathfrak{x}\ |$ berührt,

und durch

$\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$ einen Kegelschnitt $K_1^{(2)}$, der $|\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{x}\ |$ berührt,

so ist für jeden Punkt $\mathfrak{X}$ des ersten Kegelschnitts

$$\mathfrak{X}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}]$$

und für jeden Punkt $\mathfrak{X}_1$ des zweiten Kegelschnitts

$$\mathfrak{X}_1\,[\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1] = \mathfrak{A}_1\,[\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{x}],$$

folglich für einen gemeinschaftlichen Punkt beider Kegelschnitte $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1$ ist die geforderte Bedingung

$$\mathfrak{X}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}] = \mathfrak{X}\,[\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$$

erfüllt, und da die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ außer $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ im allgemeinen noch zwei gemeinschaftliche Punkte haben, so erhalten wir zwei Punkte, welche der Forderung genügen. Verändern wir aber den Punkt $\mathfrak{x}$ auf der Geraden l, so beschreiben die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zwei Kegelschnittbüschel mit den je vier Grundpunkten

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A},$$

und da die beiden Strahlbüschel $|\ \mathfrak{A}\mathfrak{x}\ |$ und $|\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{x}\ |$ perspektiv liegen, also projektiv sind, so stehen auch die beiden Kegelschnittbüschel in projektiver Abhängigkeit voneinander wegen der projektiven Beziehung ihrer Tangentenbüschel in je einem festen Grundpunkte. Die beiden projektiven Kegelschnittbüschel $[K^{(2)}]$ und $[K_1^{(2)}]$ erzeugen im allgemeinen

eine Kurve vierter Ordnung $C^{(4)}$, weil auf einer beliebigen Geraden g die beiden von den Büscheln ausgeschnittenen projektiven Punktinvolutionen viermal entsprechende Punkte zusammenfallend haben (3.). Aus der $C^{(4)}$ fällt aber die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ als illusorisch heraus, denn für die besondere Lage des Punktes

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{c})$$

besteht der eine Kegelschnitt aus dem Linienpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ und der entsprechende Kegelschnitt aus dem Linienpaar $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$, also haben beide die ganze Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ gemeinschaftlich, von der nicht sämtliche Punkte der Forderung für $\mathfrak{X}$ genügen. Es bleibt mithin nur eine Kurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ übrig als Ort für die gesuchten Punkte $\mathfrak{X}$.

(Wir haben hierdurch zugleich eine neue Konstruktion für die Punkte $\mathfrak{X}$ erhalten, auf die wir aber nicht weiter eingehen wollen.)

5. Dagegen wollen wir hier nachträglich die Reduktion eines Kegelschnittbüschels auf ein einfaches Strahlbüschel oder auf eine gerade Punktreihe geben, um dadurch in den Stand gesetzt zu werden, zwei Kegelschnittbüschel aufeinander projektiv zu beziehen oder auch ein Kegelschnittbüschel auf ein einfaches Strahlbüschel.

Die Polaren eines festen Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte eines Büschels mit vier festen Grundpunkten laufen bekanntlich durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{P}_1$ und bilden ein einfaches Strahlbüschel; nimmt man von einem zweiten Punkte $\mathfrak{Q}$ die Polaren in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels, welche durch den festen Punkt $\mathfrak{Q}_1$ laufen, so müssen die beiden um $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ beschriebenen Strahlbüschel projektiv sein, weil bekanntlich der Pol von $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|$ in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels einen Kegelschnitt beschreibt. Es sind also für sämtliche Punkte $\mathfrak{P}$ in der Ebene die zugehörigen Polarenbüschel unter sich projektive Strahlbüschel; ist insbesondere $\mathfrak{P}$ einer der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels, so geht das Polarenbüschel in das Tangentenbüschel in demselben über.

Auch umgekehrt entspricht jeder durch $\mathfrak{P}_1$ gezogenen Geraden p als Polare von $\mathfrak{P}$ ein einziger bestimmter Kegelschnitt des Büschels. Die Kegelschnitte des Büschels sind also eindeutig auf die Strahlen des Strahlbüschels der Polaren bezogen, also das Kegelschnittbüschel auf das Strahlbüschel reduziert.

Zieht man durch einen der Grundpunkte $\mathfrak{O}$ des Kegelschnittbüschels eine beliebige Gerade g, welche den Kegelschnitten des Büschels in dem veränderlichen zweiten Punkte $\mathfrak{x}$ begegnet, nimmt auf g einen festen Punkt $\mathfrak{P}$ und den zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{y}$ rücksichtlich des Paares $\mathfrak{O}\mathfrak{x}$, also

$$(\mathfrak{O}\mathfrak{x}\mathfrak{P}\mathfrak{y}) = -1,$$

woraus folgt

$$(\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 2,$$

so beschreibt bei der Veränderung des Kegelschnitts im Büschel der Punkt $\mathfrak{y}$ eine mit dem Polarenbüschel $[\mathfrak{P}_1]$ perspektive Punktreihe, folglich auch $\mathfrak{x}$ eine gerade Punktreihe auf g, die wegen der obigen Bedingung mit der Punktreihe $[\mathfrak{y}]$ projektiv ist, also auch beständig mit jeder andern in gleicher Weise konstruierten Punktreihe $[\mathfrak{x}]$ projektiv bleibt. Das Kegelschnittbüschel wird dadurch auf eine gerade Punktreihe reduziert.

Schneidet eine beliebige Gerade g die Kegelschnitte eines Büschels in dem veränderlichen Punktepaar

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1,$$

und nimmt man von einem beliebigen festen Punkt $\mathfrak{P}$ der Geraden g den zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{y}$ rücksichtlich des Paares $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, also

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1) = -1,$$

so beschreibt $\mathfrak{y}$ eine gerade Punktreihe auf g, die immer mit jeder andern gleichartig konstruierten projektiv ist, weil sie mit dem Polarenbüschel $[\mathfrak{P}_1]$ perspektiv liegt. Das Kegelschnittbüschel wird dadurch auf eine gerade Punktreihe reduziert.

Schneiden zwei beliebige Gerade g und g' die Kegelschnitte des Büschels in den Punktepaaren $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'_1$, so sind auch die von denselben beschriebenen Punktinvolutionen aufeinander projektiv bezogen, weil die einfachen geraden

Punktreihen, auf welche sie reduziert werden können, zueinander projektiv sind. Sämtliche Punktinvolutionen, die auf beliebigen Geraden durch ein Kegelschnittbüschel ausgeschnitten werden, sind also unter sich projektiv. Legt man durch zwei Grundpunkte $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$ eines Kegelschnittbüschels einen beliebigen festen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, so schneidet derselbe jeden Kegelschnitt des Büschels noch in zwei veränderlichen Punkten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt $\mathfrak{P}$ läuft und ein einfaches Strahlbüschel $[\mathfrak{P}]$ beschreibt (Th. d. K. S. 239).

Der Mittelpunkt $\mathfrak{P}$ liegt auf der Verbindungslinie der beiden übrigen Grundpunkte des Büschels. Konstruiert man den zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{z}$ zu $\mathfrak{P}$ rücksichtlich des Paares $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, also

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{z}\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = -1,$$

so beschreibt $\mathfrak{z}$ wegen des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine gerade Punktreihe, welche perspektiv liegt mit dem Strahlbüschel $[\mathfrak{P}_1]$, gebildet von den Polaren des Punktes $\mathfrak{P}$ rücksichtlich der Kegelschnitte des Büschels; folglich ist auch das Kegelschnittbüschel projektiv bezogen oder reduziert auf das Strahlbüschel $[\mathfrak{P}]$.

Alle diese Reduktionen (denen im dualen Gebiete analoge gegenüberstehen) des Kegelschnittbüschels, eines Gebildes zweiter Ordnung und einfach-unendlicher Mächtigkeit, auf ein Gebilde erster Ordnung und gleicher Mächtigkeit gestatten die projektive Beziehung dieser Gebilde untereinander, wovon vielfach Gebrauch gemacht wird. Wir kehren nach dieser der Theorie der Kegelschnitte entnommenen Abschweifung zu der Betrachtung der $C^{(3)}$ zurück.

§ 5. Das Kegelschnittgewebe.

1. Sind $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ irgend zwei Paare konjugierter Punkte der $C^{(3)}$, so bestimmen die vier Verbindungslinien

$$|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|, \quad |\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1|, \quad |\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}|, \quad |\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1|$$

als gemeinschaftliche Tangenten eine Kegelschnittschar, welcher die beiden in Punktepaare ausgearteten Kegelschnitte

schnitte $[\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1]$ und $[\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1]$ angehören. Da die aus jedem Punkte an die Kegelschnitte einer Schar gesendeten Tangentenpaare einer Strahleninvolution angehören, so wird auch, wenn wir aus dieser Kegelschnittschar einen beliebigen Kegelschnitt

$$\mathfrak{A}^{(2)}$$

herausnehmen, das aus einem Punkte $\mathfrak{X}$ der $C^{(3)}$ an $\mathfrak{A}^{(2)}$ gesendete Tangentenpaar der Strahleninvolution angehören, welche dem Punkte $\mathfrak{X}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$ zugehört.

Nehmen wir in gleicher Weise zwei andere Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ der $C^{(3)}$, ziehen die Verbindungslinien

$$|\mathfrak{R}\mathfrak{S}|, \quad |\mathfrak{R}\mathfrak{S}_1|, \quad |\mathfrak{R}_1\mathfrak{S}|, \quad |\mathfrak{R}_1\mathfrak{S}_1|$$

und nehmen aus der Kegelschnittschar mit diesen vier gemeinschaftlichen Tangenten einen beliebigen Kegelschnitt

$$\mathfrak{B}^{(2)}$$

heraus, so sendet auch an diesen der Punkt $\mathfrak{X}$ ein Tangentenpaar der zugehörigen Strahleninvolution.

Nehmen wir endlich noch zwei beliebige Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{V}\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{W}\mathfrak{W}_1$ der $C^{(3)}$, ziehen die Verbindungslinien

$$|\mathfrak{V}\mathfrak{W}|, \quad |\mathfrak{V}\mathfrak{W}_1|, \quad |\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}|, \quad |\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}_1|$$

und entnehmen der Kegelschnittschar, welche diese vier Geraden zu gemeinschaftlichen Tangenten hat, einen beliebigen Kegelschnitt

$$\mathfrak{C}^{(2)},$$

so sendet auch an diesen der Punkt $\mathfrak{X}$ ein Tangentenpaar der zugehörigen Strahleninvolution.

Es läßt sich daher die ursprüngliche Bedingung für den Punkt $\mathfrak{X}$ auch so umgestalten:

Der Ort eines Punktes $\mathfrak{X}$, welcher an drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$, die nicht derselben Kegelschnittschar angehören, drei Tangentenpaare sendet, die einer Strahleninvolution angehören, ist eine Kurve dritter Ordnung $C^{(3)}$.

(Die drei ursprünglichen Punktepaare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ sind nichts anderes, als drei besondere in Punktepaare ausgeartete Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$.)

Wegen der Willkürlichkeit der Wahl von Paaren konjugierter Punkte $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ u. s. w. lassen sich solche Kegelschnitte wie $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ in großer Menge ausfindig machen, die zur Erzeugung der Kurve $C^{(3)}$ verwendet werden können. Nun gehört nach § 3, 5 der Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ auch einer Schar an, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$$

hat, weil die acht Geraden

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|,$$
$$|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|, \quad |\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1|, \quad |\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}|, \quad |\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1|$$

einen und denselben Kegelschnitt berühren; ebenso gehört der Kegelschnitt $\mathfrak{B}^{(2)}$ einer Schar mit den vier gemeinschaftlichen Tangenten

$$|\mathfrak{C}\mathfrak{A}|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1|$$

und der Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ einer Schar mit den vier gemeinschaftlichen Tangenten

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$$

an. Bezeichnen wir zur Abkürzung diese drei Kegelschnittscharen durch

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}], \quad [\mathfrak{C}\mathfrak{A}], \quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

(wo $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ bestimmt wird durch die beiden Kegelschnitte, welche aus den Punktepaaren $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ bestehen als ausgeartete Kegelschnitte u. s. w.), dann ist

$\mathfrak{A}^{(2)}$ der Schar $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$,
$\mathfrak{B}^{(2)}$ „ „ $[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]$,
$\mathfrak{C}^{(2)}$ „ „ $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$

entnommen.

Da eine Kegelschnittschar durch zwei Kegelschnitte bestimmt wird, und die Tangentenpaare aus einem Punkte an die Kegelschnitte einer Schar immer einer und derselben Strahleninvolution angehören, so werden wir vermittelst der aus den drei Scharen

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}], \quad [\mathfrak{C}\mathfrak{A}], \quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

entnommenen Kegelschnitte

$$\mathfrak{A}^{(2)}, \quad \mathfrak{B}^{(2)}, \quad \mathfrak{C}^{(2)}$$

drei neue Scharen bilden können

$$[\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}], \quad [\mathfrak{C}^{(2)}\mathfrak{A}^{(2)}], \quad [\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}]$$

und aus jeder derselben einen beliebigen neuen Kegelschnitt entnehmen

$$\mathfrak{A}_1^{(2)}, \quad \mathfrak{B}_1^{(2)}, \quad \mathfrak{C}_1^{(2)};$$

jeder Punkt $\mathfrak{X}$ des Ortes $C^{(3)}$ muß dann für diese drei neuen Kegelschnitte dieselbe Eigenschaft besitzen wie für die drei früheren, und indem wir in dieser Weise fortfahren, erhalten wir eine grosse Menge von Kegelschnitten, die in einem gewissen Zusammenhange miteinander stehen, indem zwei dieser Kegelschnitte immer zu einer Schar von Kegelschnitten führen und jeder Kegelschnitt derselben mit einem andern ihr nicht angehörigen Kegelschnitt zur Bildung einer neuen Schar führt u. s. f.

Wir nennen die Gesamtheit aller dieser Kegelschnitte ein Kegelschnittgewebe und können daher sagen, daß für jeden Punkt $\mathfrak{X}$ der $C^{(3)}$ die Tangentenpaare an sämtliche Kegelschnitte des Gewebes einer und derselben Strahleninvolution angehören.

2. Um die Kegelschnitte eines Gewebes besser zu übersehen und die Mächtigkeit desselben zu beurteilen, gehen wir wieder von den drei Punktepaaren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

aus und bestimmen zuerst die Kegelschnittschar $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten hat

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|.$$

Nehmen wir aus dieser Kegelschnittschar einen veränderlichen Kegelschnitt

$$\mathfrak{X}^{(2)}$$

heraus, legen aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ die Tangentenpaare an $\mathfrak{X}^{(2)}$ und fassen dieselben als die gemeinschaftlichen Tangenten einer neuen Kegelschnittschar auf (auch wenn das eine oder beide Tangentenpaare konjugiert-imaginär sind, ist bekanntlich durch die sie vertretenden Strahleninvolutionen die neue Kegelschnittschar vollständig bestimmt und reell konstruierbar, Th. d. K. S. 326), so wird jeder Kegelschnitt



$\mathfrak{K}^{(2)}$

dieser Schar dem Gewebe angehören, und umgekehrt muß jeder Kegelschnitt des Gewebes aus einer Schar $[\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{X}^{(2)}]$ entnommen sein, wo $\mathfrak{A}^{(2)} = [\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$ der in ein Punktepaar ausgeartete Kegelschnitt ist, und $\mathfrak{X}^{(2)}$ aus der Schar $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ genommen wird. Es giebt keine andern Kegelschnitte des Gewebes als solche $\mathfrak{K}^{(2)}$.

In der That, ist $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein beliebiger Kegelschnitt des Gewebes, so muß er die Eigenschaft besitzen, daß die beiden Tangentenpaare aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ den Strahleninvolutionen angehören, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ nach den Punktepaaren $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ senden. Die Tangentenpaare aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ bestimmen aber eine Kegelschnittschar, in welcher es einen und nur einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ giebt, welcher $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ berührt. Da nun die drei Kegelschnitte: 1. das Punktepaar $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$, 2. der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ des Gewebes und 3. der Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ derselben Schar angehören, so müssen die drei Tangentenpaare aus $\mathfrak{B}$ an dieselben einer Strahleninvolution angehören, welche schon durch die beiden ersten Tangentenpaare bestimmt wird und welche dem Punkte $\mathfrak{B}$ zugehört rücksichtlich der $C^{(3)}$. Das Tangentenpaar aus $\mathfrak{B}$ an $\mathfrak{X}^{(2)}$, von dem $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ ein Teil ist, muß daher auch dieser Strahleninvolution angehören, also muß $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|$ der andere Teil sein, d. h. $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|$ muß $\mathfrak{X}^{(2)}$ berühren; in gleicher Weise erkennen wir, daß auch $|\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1|$ und $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1|$ den $\mathfrak{X}^{(2)}$ berühren müssen, woraus folgt, daß $\mathfrak{X}^{(2)}$ die vier Tangenten

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$$

hat, also der Schar $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ angehört.

Wir schließen hieraus, daß der willkürlich dem Gewebe entnommene Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in der That durch diejenige Konstruktion hervorgeht, welche wir oben angegeben haben, nämlich der veränderlichen Schar $[\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{X}^{(2)}]$ angehört, wo $\mathfrak{X}^{(2)}$ aus der Schar $[\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}]$ entnommen ist.

Hieraus können wir die Mächtigkeit der Kegelschnitte eines Gewebes beurteilen; die Kegelschnitte $\mathfrak{X}^{(2)}$ in der Schar $[\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}]$ sind von einfach-unendlicher Mächtigkeit, und jeder

derselben wird mit $\mathfrak{A}^{(2)}$ zur Bildung einer neuen Schar von einfach-unendlicher Mächtigkeit zusammengestellt, aus der alle Kegelschnitte des Gewebes hervorgehen; folglich bilden die sämtlichen Kegelschnitte des Gewebes eine doppelt-unendliche Mannigfaltigkeit (∞^2), über welche die vorige Konstruktion eine anschauliche Übersicht gewährt.

3. Wir haben die Gesamtheit der Kegelschnitte des Gewebes hervorgehen lassen aus den drei ursprünglichen voneinander unabhängigen Punktepaaren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1,$$

welche als drei ausgeartete Kegelschnitte des Gewebes aufzufassen sind. Wir nahmen aus der Schar $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$, verwendeten ihn mit $[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$ zur Bildung einer veränderlichen Kegelschnittschar, aus der sämtliche Kegelschnitte des Gewebes zu entnehmen sind. Wir können aber die erste Schar $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, aus der $\mathfrak{X}^{(2)}$ hervorgeht, auch als gegeben annehmen durch zwei beliebige Kegelschnitte derselben

$$\mathfrak{B}^{(2)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}^{(2)},$$

und wir können das Punktepaar $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ ersetzen durch einen beliebigen Kegelschnitt

$$\mathfrak{A}^{(2)},$$

der mit $\mathfrak{X}^{(2)}$ verbunden die veränderliche Kegelschnittschar bestimmt.

Dann erhalten wir zur Bildung der sämtlichen Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ des Gewebes drei beliebige voneinander unabhängige Kegelschnitte

$$\mathfrak{A}^{(2)}, \quad \mathfrak{B}^{(2)}, \quad \mathfrak{C}^{(2)},$$

von denen ausgehend wir durch Scharenbildung vermittelst je zweier zu sämtlichen Kegelschnitten des Gewebes gelangen.

Durch drei unabhängig voneinander gegebene Kegelschnitte ist das Gewebe bestimmt; zwischen vier Kegelschnitten desselben muß also eine Bedingung obwalten. Diese besteht, wenn wir für die vier Kegelschnitte

$$\mathfrak{A}^{(2)}, \quad \mathfrak{B}^{(2)}, \quad \mathfrak{C}^{(2)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}^{(2)}$$

nehmen gemäß der Entstehung des Gewebes, darin, daß die beiden Scharen



$$[\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{K}^{(2)}]$$

einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ haben müssen. (In dem besonderen Fall von vier Punktepaaren ist diese Bedingung in dem Satze § 3, 5 enthalten.) Allgemein läßt sich diese Bedingung so aussprechen:

Werden irgend vier Kegelschnitte aus einem Gewebe genommen, von denen keine drei derselben Schar angehören, und man verbindet beliebig zwei derselben und die beiden übrigen zur Bildung zweier Kegelschnittscharen, so haben dieselben allemal einen Kegelschnitt gemeinschaftlich.

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt daraus, daß, wenn

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{X}^{(2)} & \text{aus der Schar} & & [\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}], \\ \mathfrak{Y}^{(2)} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & [\mathfrak{C}^{(2)}\mathfrak{A}^{(2)}], \\ \mathfrak{Z}^{(2)} & \text{,,} \quad \text{,,} & \text{,,} & [\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}] \end{array}$$

entnommen sind, die drei veränderlichen Scharen

$$[\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{X}^{(2)}], \quad [\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{Y}^{(2)}], \quad [\mathfrak{C}^{(2)}\mathfrak{Z}^{(2)}]$$

immer dieselben Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ des Gewebes liefern müssen. Dies läßt sich auch als besonderer Satz so aussprechen:

Gehören die drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}_1^{(2)}$ einer Kegelschnittschar und die drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$, $\mathfrak{B}_1^{(2)}$ einer zweiten Kegelschnittschar an, welche mit der ersten den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ gemein hat, so haben auch die beiden Kegelschnittscharen

$$[\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{B}_1^{(2)}\mathfrak{C}_1^{(2)}]$$

einen Kegelschnitt gemeinschaftlich, sowie auch

$$[\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{B}_1^{(2)}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{C}^{(2)}\mathfrak{C}_1^{(2)}]$$

einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt.

Aus diesem allgemeinen Satze ergiebt sich, daß das ganze Kegelschnittgewebe ebenso aus drei beliebigen seiner Kegelschnitte

$$\mathfrak{K}_1^{(2)}, \quad \mathfrak{K}_2^{(2)}, \quad \mathfrak{K}_3^{(2)},$$

die nicht derselben Schar angehören, hergeleitet werden kann, wie es aus den drei Kegelschnitten $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ hervorging.

Denn nehmen wir irgend einen vierten Kegelschnitt des Gewebes $\mathfrak{K}_4^{(2)}$, so müssen die beiden Kegelschnittscharen $[\mathfrak{K}_1^{(2)}\mathfrak{K}_2^{(2)}]$ und $[\mathfrak{K}_3^{(2)}\mathfrak{K}_4^{(2)}]$ einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ haben; wir können daher von den drei Kegelschnitten $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, $\mathfrak{K}_2^{(2)}$, $\mathfrak{K}_3^{(2)}$, welche nicht derselben Schar angehören, zur Bestimmung des Gewebes ausgehen, aus der Schar $[\mathfrak{K}_1^{(2)}\mathfrak{K}_2^{(2)}]$ einen veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ nehmen und ihn mit $\mathfrak{K}_3^{(2)}$ zur Bildung einer neuen Schar $[\mathfrak{K}_3^{(2)}\mathfrak{X}^{(2)}]$ verbinden, aus welcher wir sämtliche Kegelschnitte $\mathfrak{K}_4^{(2)}$ des Gewebes entnehmen.

4. Zieht man an irgend zwei Kegelschnitte des Gewebes ein Paar gemeinschaftlicher Tangenten, so besitzt der Schnittpunkt derselben offenbar die Eigenschaft, an sämtliche Kegelschnitte des Gewebes Tangentenpaare zu senden, welche einer und derselben Strahleninvolution angehören, also muß dieser Punkt $\mathfrak{P}$ auf der $C^{(3)}$ liegen; denn die Tangentenpaare an die ersten beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ fallen in eines zusammen, an einen dritten Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ des Gewebes geht also ein zweites Tangentenpaar, und diese beiden bestimmen schon die Strahleninvolution für $\mathfrak{P}$, der sämtliche übrigen Tangentenpaare angehören müssen, weil $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ das ganze Gewebe bestimmen. Wenn aber ein Paar gemeinschaftlicher Tangenten von $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ sich in $\mathfrak{P}$ schneidet, so giebt es noch ein zweites Paar gemeinschaftlicher Tangenten, welche, wenn auch konjugiert-imaginär, sich in dem immer reellen Punkte $\mathfrak{P}_1$ schneiden, und das Punktepaar $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ ist als ein ausgearteter Kegelschnitt der Schar $[\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}]$ aufzufassen; es müssen also $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ ein Paar konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ sein, weil sie als Mittelpunkte zweier erzeugenden Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage auftreten (§ 3).

Wir schließen also:

Ein Punktepaar, in welches ein Kegelschnitt des Gewebes ausartet, ist allemal ein Paar konjugierter Punkte der $C^{(3)}$. Oder:

Die $C^{(3)}$ ist der Ort sämtlicher Punktepaare, in welche Kegelschnitte des Gewebes ausarten.

Eine Kegelschnittschar hat im allgemeinen drei in Punktepaare ausgeartete Kegelschnitte, die drei Paar Gegenecken des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits. Ein Kegelschnittgewebe hat deren unendlich viele (von einfach-unendlicher Mächtigkeit); je zwei Kegelschnitte des Gewebes verbinden sich zu einer Schar mit drei solchen Punktepaaren, die allemal ein vollständiges Vierseit mit seinen sechs Ecken bilden, welches der $C^{(3)}$ einbeschrieben ist.

Da durch drei willkürlich anzunehmende Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ das Kegelschnittgewebe bestimmt wird, so können wir folgenden besonderen Satz aussprechen:

Sind irgend drei Kegelschnitte unabhängig voneinander gegeben, so haben je zwei derselben vier (reelle oder paarweise konjugiert-imaginäre) gemeinschaftliche Tangenten, die ein vollständiges Vierseit mit sechs Ecken bilden; die dadurch erhaltenen $3 . 6 = 18$ Punkte liegen auf einer $C^{(3)}$ und bilden neun Paare konjugierter Punkte derselben.

§ 6. Die $\mathfrak{K}^{(3)}$, umhüllt von den Verbindungslinien konjugierter Punkte der $C^{(3)}$.

1. Die Pole einer Geraden x in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte einer Schar liegen bekanntlich auf einer Geraden x_1, welche die Eigenschaft hat, daß ihre Pole wieder auf x liegen, sodaß diese beiden Geraden konjugierte Strahlen rücksichtlich der Kegelschnittschar heißen. Nennen wir nun die Verbindungslinie zweier konjugierten Punkte der $C^{(3)}$

$$| \mathfrak{X}\mathfrak{X}_1 | = x$$

und wählen die Kegelschnittschar $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ mit den vier gemeinschaftlichen Tangenten

$$| \mathfrak{B}\mathfrak{C} |, \quad | \mathfrak{B}\mathfrak{C}_1 |, \quad | \mathfrak{B}_1\mathfrak{C} |, \quad | \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 |,$$

welche als ausgeartete Kegelschnitte die beiden Punktepaare $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ enthält, so sind die Pole von x rücksichtlich dieser beiden Punktepaare die vierten harmonischen Punkte zu den Schnittpunkten $(\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1)$ und $(\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1)$ zugeordnet

rücksichtlich der Punktepaare $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$. Diese vierten harmonischen Punkte liegen aber, wie wir wissen (§ 2, 8), in einer Geraden mit dem dritten Schnittpunkte von $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$ und $C^{(3)}$, welche wir früher l genannt haben und jetzt mit x_1 bezeichnen wollen. Diese Gerade x_1 enthält nun aber nicht nur die Pole der x rücksichtlich sämtlicher Kegelschnitte der Schar $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, sondern überhaupt die Pole von x rücksichtlich sämtlicher Kegelschnitte des Gewebes. Denn da an Stelle der Kegelschnittschar $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ irgend eine andere dem Gewebe angehörige Schar von Kegelschnitten $[\mathfrak{K}_1^{(2)}\mathfrak{K}_2^{(2)}]$ gesetzt werden kann, rücksichtlich welcher die Pole von x ebenfalls auf einer Geraden liegen müssen, welche durch den dritten Schnittpunkt der Geraden $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$ mit $C^{(3)}$ hindurchgehen muß, da ferner die beiden Kegelschnittscharen $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ und $[\mathfrak{K}_1^{(2)}\mathfrak{K}_2^{(2)}]$ einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt haben, rücksichtlich dessen der Pol von x derselbe bleibt, so wird auch die durch diese beiden Punkte bestimmte Gerade x_1 die Pole von x enthalten rücksichtlich beider Kegelschnittscharen $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ und $[\mathfrak{K}_1^{(2)}\mathfrak{K}_2^{(2)}]$, also auch rücksichtlich sämtlicher Kegelschnitte des Gewebes.

Nennen wir $\mathfrak{T}_1$, wie früher, den dritten Schnittpunkt der Geraden $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$ mit der $C^{(3)}$, so werden x und x_1 konjugierte Strahlen sein rücksichtlich sämtlicher Kegelschnitte des Gewebes, nämlich die Doppelstrahlen derjenigen Strahleninvolution, welche dem Punkte $\mathfrak{T}_1$ zugehört für die $C^{(3)}$, und welche immer eine hyperbolische ist, weil für sie $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1| = x$ ein Doppelstrahl, x_1 der andere Doppelstrahl ist.

Wir schließen hieraus:

Wenn eine Gerade x in Bezug auf drei von einander unabhängige Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ des Gewebes ihre drei Pole auf einer Geraden x_1 gelegen hat, so hat sie auch für alle andern Kegelschnitte des Gewebes ihre Pole auf derselben Geraden x_1; der Schnittpunkt (xx_1) liegt auf der $C^{(3)}$ und xx_1 sind die Doppelstrahlen derjenigen Strahleninvolution, welche dem Punkte (xx_1) rücksichtlich der $C^{(3)}$ zugehört.

2. Solcher Geraden x, deren drei Pole in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ wieder auf einer Geraden x_1 liegen, giebt es aber im allgemeinen durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ der Ebene nur drei; denn dreht sich x um $\mathfrak{O}$, so beschreiben ihre Pole rücksichtlich $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ drei projektive Punktreihen $[\mathfrak{a}]$, $[\mathfrak{b}]$, $[\mathfrak{c}]$ auf den Geraden a, b, c, und es beschreiben die Verbindungslinien $|\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,|$ und $|\,\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,|$ daher zwei Kegelschnitte, welche außer a noch drei gemeinschaftliche Tangenten haben; diese besitzen die verlangte Eigenschaft. Der Ort der Geraden x ist also eine Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$. Da nun eine solche Gerade x immer die Verbindungslinie zweier konjugierten Punkte der $C^{(3)}$ ist oder, was dasselbe sagt, ein Doppelstrahl der einem Punkte der $C^{(3)}$ zugehörigen Strahleninvolution, so können wir den Satz aussprechen:

Die sämtlichen Verbindungslinien aller Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ der $C^{(3)}$ umhüllen eine Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$. Oder:

Die Doppelstrahlen sämtlicher den Punkten einer $C^{(3)}$ zugehörigen Strahleninvolutionen umhüllen dieselbe Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$.

Wir wollen ein Paar solcher konjugierten Strahlen xx_1 rücksichtlich sämtlicher Kegelschnitte des Gewebes ein Paar konjugierter Tangenten der Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ nennen.

3. Wir wollen jetzt den Berührungspunkt jedes solchen Strahles x mit der von ihm umhüllten Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ermitteln.

Aus zwei beliebigen Paaren konjugierter Punkte

$$\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1$$

der $C^{(3)}$ folgt bekanntlich immer ein drittes Paar

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y},\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y});$$

lassen wir nun den Punkt $\mathfrak{Y}$ dem Punkte $\mathfrak{X}$ sich unendlich nähern, so wird auch $\mathfrak{Y}_1$ dem $\mathfrak{X}_1$ unendlich nahe rücken, wie aus der Natur involutorischer Gebilde hervorgeht. Dabei wird nun $|\,\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\,|$ die Tangente der $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{X}$, und $|\,\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1\,|$ die Tangente der $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{X}_1$; der Schnittpunkt beider Tangenten heiße $\mathfrak{T}_1$ und hat zu seinem konjugierten Punkte den dritten Schnittpunkt $\mathfrak{T}$ des Strahles $|\,\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1\,|$ mit der $C^{(3)}$; folglich wird

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}) = \mathfrak{T},\quad (\mathfrak{X}\mathfrak{Y},\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1) = \mathfrak{T}_1$$

und der dritte Diagonalpunkt dieses ausgearteten vollständigen Vierecks $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1$ nämlich der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1)$$

wird der Berührungspunkt d. h. der Schnittpunkt unendlich benachbarter Tangenten der von $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$ und $|\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1|$ umhüllten Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$. Dies ist aber nach bekannter Eigenschaft des vollständigen Vierecks der vierte harmonische zu $\mathfrak{T}$ zugeordnete Punkt $\mathfrak{T}_1$ rücksichtlich des Paares $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$; also ist das Doppelverhältnis

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1\ \mathfrak{T}\mathfrak{T}_1) = -1,$$

und wir können den Satz aussprechen:

Die Verbindungslinie zweier konjugierten Punkte $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$ berührt den von ihr umhüllten Ort in dem vierten harmonischen Punkt, der dem dritten Schnittpunkt $\mathfrak{T}$ von $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$ mit der $C^{(3)}$ zugeordnet ist.

Die Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ gruppieren sich zu Paaren, denn die dem Punkte $\mathfrak{T}$ der $C^{(3)}$ zugehörige Strahleninvolution ist eine hyperbolische und hat zu einem Doppelstrahl $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1| = x$, folglich noch einen zweiten Doppelstrahl x_1, der auch zwei konjugierte Punkte $\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'_1$ der $C^{(3)}$ verbinden muß (die allerdings auch konjugiert-imaginär sein können).

Da aus diesen beiden Paaren konjugierter Punkte das dritte folgt

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X}',\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}'_1) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{X}\mathfrak{X}'_1,\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}')$$

und die beiden Berührungspunkte

$$\mathfrak{T}_1 \text{ und } \mathfrak{T}'_1$$

auf den Strahlen $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$, $|\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'_1|$ die vierten harmonischen zu $\mathfrak{T}$ zugeordneten sind, so folgt aus der bekannten Eigenschaft des vollständigen Vierecks $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'_1$, daß $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}'_1$ auf derselben Geraden liegen mit dem obigen dritten Paare konjugierter Punkte, also ist auch $|\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}'_1|$ eine Tangente der $\mathfrak{K}^{(3)}$, und wir schließen:

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier konjugierten Tangenten xx_1 der $\mathfrak{K}^{(3)}$ (s. o. 2.) ist selbst eine dritte Tangente der $\mathfrak{K}^{(3)}$.

4. Da der Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ zweier konjugierten Tangenten xx_1 der $\mathfrak{K}^{(3)}$ auf der $C^{(3)}$ liegt und der Mittelpunkt einer



Strahleninvolution ist, deren Doppelstrahlen xx_1 sind, und deren Strahlenpaare immer nach einem Paare konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ hingehen, so können wir auch sagen:

Jedes Paar konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ wird durch jedes Paar konjugierter Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ (oder durch jedes Paar konjugierter Strahlen xx_1 des Gewebes) harmonisch getrennt.

Nehmen wir nun irgend drei solcher Paare xx_1 konjugierter Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ oder, was dasselbe sagt, von drei Strahleninvolutionen beliebiger Punkte der $C^{(3)}$ die Doppelstrahlen

$$aa_1, \quad bb_1, \quad cc_1,$$

die nicht gerade die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks sein mögen, so wird jede weitere Tangente der $\mathfrak{K}^{(3)}$

$$|\,\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1\,| = x$$

die Eigenschaft haben müssen, daß jedes der drei Strahlenpaare aa_1, bb_1, cc_1 die Punkte $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ harmonisch trennt, also wird die Gerade x von den Strahlenpaaren aa_1, bb_1, cc_1 in drei Punktepaaren einer Punktinvolution getroffen, deren Doppelpunkte $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ sind. Hierdurch wird der Ort der Geraden x definiert als beschrieben von einer Geraden, auf welcher drei Strahlenpaare aa_1, bb_1, cc_1 Punktepaare einer Involution ausschneiden; dies ist aber die dual gegenüberstehende (reziproke) Aufgabe von derjenigen, welche in § 2, 1 den Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildete; wenn dort also eine Kurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ resultierte, so muß hier eine Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ hervorgehen, wie wir sie bereits (2.) in der That gefunden haben; und alle Eigenschaften welche wir für jene gefunden haben, müssen ins duale Gebiet übertragen auch für diese gelten. Die beiden dual gegenüberstehenden Gebilde $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ treten hier zusammen auf, ohne aber wie beim Kegelschnitt (als Punktgebilde und Tangentengebilde aufgefaßt) identisch zu sein.

Die hieraus hervorgehenden Eigenschaften und Erzeugungsweisen der $\mathfrak{K}^{(3)}$ zu wiederholen erscheint überflüssig, da die Übertragung ins duale Gebiet ohne Schwierigkeit ist.

Auf den innigen Zusammenhang der Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ einzugehen, werden wir noch mehrfach Gelegenheit haben.

5. Wir beschränken uns hier zunächst darauf, drei solche Strahlenpaare

$$aa_1, \quad bb_1, \quad cc_1,$$

wie sie zur Bestimmung der $\mathfrak{K}^{(3)}$ notwendig und hinreichend sind, herzustellen, indem wir von drei ursprünglich gegebenen von einander unabhängigen Punktepaaren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1,$$

welche zur Bestimmung der $C^{(3)}$ dienen, ausgehen.

Seien die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{c},$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{a},$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{b},$$

und werden die vierten harmonischen Punkte durch die Werte der Doppelverhältnisse bestimmt:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}'_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\ \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'_1) = -1,$$

die durch folgende Konstruktion gefunden werden können:

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C},\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{D}, \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}) = \mathfrak{D}_1,$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{E}, \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}) = \mathfrak{E}_1,$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{F}, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}) = \mathfrak{F}_1;$$
$$|\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\,| = a, \quad |\,\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\,| = b, \quad |\,\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\,| = c,$$
$$|\,\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\,| = d, \quad |\,\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\,| = e, \quad |\,\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1\,| = f;$$
$$(dc) = \mathfrak{a}_1, \quad (ea) = \mathfrak{b}_1, \quad (fb) = \mathfrak{c}_1,$$
$$(db) = \mathfrak{a}'_1, \quad (ec) = \mathfrak{b}'_1, \quad (fa) = \mathfrak{c}'_1;$$

dann werden

$$|\,\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}'_1\,| = a_1, \quad |\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}'_1\,| = b_1, \quad |\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}'_1\,| = c_1,$$

und

$$aa_1, \quad bb_1, \quad cc_1$$

sind die drei Strahlenpaare, welche zur Bestimmung der $\mathfrak{K}^{(3)}$ notwendig und hinreichend sind und die zum Ausgangspunkt

der dual gegenüberstehenden Untersuchung dienen können, wie die drei ursprünglichen Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

zu der Untersuchung der Kurve $C^{(3)}$ und ihrer Eigenschaften geführt haben.

Umgekehrt kann man auch von den drei Strahlenpaaren

$$aa_1, \quad bb_1, \quad cc_1$$

ausgehend zu den Punktepaaren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

gelangen, was wir nicht weiter ausführen wollen. Die Übertragung der gewonnenen Resultate führt aber auf ein dem Kegelschnittgewebe dual gegenüberstehendes Gebilde, welches noch besonders hervorgehoben werden soll.

§ 7. Das Kegelschnittnetz.

1. Ebenso wie die drei Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

als drei ausgeartete Kegelschnitte aufgefaßt werden konnten zur Bestimmung für ein ganzes Gewebe von doppelt-unendlich vielen Kegelschnitten, können die drei Linienpaare

$$aa_1, \quad bb_1, \quad cc_1$$

zu einem Gebilde von Kegelschnitten führen, welches man ein Kegelschnittnetz nennt und welches in analoger Weise mit der Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ zusammenhängt, wie das Kegelschnittgewebe mit der $C^{(3)}$. Beide Gebilde stehen aber auch untereinander in enger Verbindung, wie die $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$.

Die beiden Linienpaare

$$bb_1 \quad \text{und} \quad cc_1$$

bestimmen nämlich ein Kegelschnittbüschel, welches die vier Grundpunkte hat

$$(bc), \quad (bc_1), \quad (b_1c), \quad (b_1c_1);$$

einen beliebigen Kegelschnitt aus diesem Büschel wollen wir

$$A^{(2)}$$

nennen. Ebenso bestimmen die beiden Linienpaare

$$cc_1 \quad \text{und} \quad aa_1$$

ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten

$$(ca), \quad (ca_1), \quad (c_1 a), \quad (c_1 a_1),$$

und ein beliebiger demselben entnommener Kegelschnitt heiße

$$B^{(2)};$$

endlich bestimmen die beiden Linienpaare

$$a a_1 \quad \text{und} \quad b b_1$$

ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten

$$(ab), \quad (ab_1), \quad (a_1 b), \quad (a_1 b_1),$$

und ein beliebiger aus demselben entnommener Kegelschnitt heiße $C^{(2)}$; dann bestimmen die drei Kegelschnitte

$$A^{(2)}, \quad B^{(2)}, \quad C^{(2)}$$

ein ganzes Kegelschnittnetz von doppelt-unendlicher Mannigfaltigkeit (∞^2) oder eine einfach-unendliche Mannigfaltigkeit von Kegelschnittbüscheln, deren Gesamtheit so zusammengefaßt werden kann:

Ein veränderlicher Kegelschnitt $X^{(2)}$ werde aus dem durch die beiden Kegelschnitte $B^{(2)}$ und $C^{(2)}$ bestimmten Büschel

$$[B^{(2)} C^{(2)}]$$

entnommen und zur Bildung eines neuen Kegelschnittbüschels

$$[A^{(2)} X^{(2)}]$$

verwendet, dann erfüllen sämtliche Kegelschnitte $K^{(2)}$ dieses variablen Büschels das Kegelschnittnetz, und es giebt keine andern Kegelschnitte des Netzes weiter, als die auf diese Weise konstruierten.

2. Drei voneinander unabhängige Kegelschnitte

$$A^{(2)}, \quad B^{(2)}, \quad C^{(2)}$$

(die nicht demselben Büschel angehören) bestimmen vollständig das Kegelschnittnetz, welches durch fortgesetzte Bildung von Büscheln aus je zweien hergestellt wird.

Irgend vier Kegelschnitte des Netzes sind der Bedingung unterworfen, daß sie in irgend einer Weise zu zwei Paaren vereinigt, zwei Kegelschnittbüschel bestimmen, welche allemal einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt haben (d. h. deren acht Grundpunkte auf einem und demselben Kegelschnitt liegen).

Die Gesamtheit der in Linienpaare zerfallenden Kegelschnitte des Netzes umhüllt die Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$, und ein solches Linienpaar ist allemal ein Paar konjugierter Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$.

Die Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist der Ort einer Geraden, welche durch drei voneinander unabhängige Kegelschnitte des Netzes (und daher von sämtlichen Kegelschnitten des Netzes) in Punktepaaren geschnitten wird, die einer Involution angehören. Die Doppelpunkte aller solchen Punktinvolutionen liegen auf der Kurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ und sind allemal ein Paar konjugierter Punkte derselben.

Ist ein Kegelschnittbüschel und zwei Gerade a, a_1 gegeben, auf welchen durch das Büschel zwei Punktinvolutionen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage ausgeschnitten werden, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punktepaare

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|, \quad |\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1|, \quad |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}|, \quad |\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1|$$

die Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ (vergl. § 3).

Der Ort einer Geraden x, deren Pole in Bezug auf drei voneinander unabhängige Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ (folglich in Bezug auf sämtliche durch dieselben bestimmten Kegelschnitte eines Gewebes) wieder auf einer Geraden x_1 liegen, ist eine Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$, und die Strahlen xx_1 sind ein Paar konjugierter Tangenten derselben. Der Schnittpunkt (xx_1) beschreibt die Kurve dritter Ordnung $C^{(3)}$.

Der Ort eines Punktes $\mathfrak{X}$, dessen Polaren in Bezug auf drei voneinander unabhängige Kegelschnitte $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$ (folglich in Bezug auf sämtliche durch dieselben bestimmten Kegelschnitte eines Netzes) sich wieder in einem Punkte $\mathfrak{X}_1$ schneiden, ist eine Kurve dritter Ordnung $C^{(3)}$, und die Punkte $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ sind ein Paar konjugierter Punkte derselben. Die Verbindungslinie $|\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1|$ umhüllt die Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$.

Da aus zwei Paaren konjugierter Punkte der $C^{(3)}$, nämlich $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1$, immer ein drittes Paar

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y},\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1) = \mathfrak{Z},\quad (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}_1,\ \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}) = \mathfrak{Z}_1$$

folgt (§ 2, 2), so können die drei Verbindungslinien

$$|\,\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1\,| = x,\quad |\,\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1\,| = y,\quad |\,\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1\,| = z$$

auch aufgefaßt werden als die Diagonalen eines vollständigen Vierseits, dessen drei Paar Gegenecken $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1$ sind. Dieses Diagonaldreiseit xyz ist aber bekanntlich ein gemeinschaftliches Polardreiseit (selbstkonjugiertes Dreiseit) für sämtliche Kegelschnitte der Schar, welche dem vollständigen Vierseit einbeschrieben werden können, und diese Kegelschnittschar gehört dem Gewebe an. Wir können daher auch sagen:

Die Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ wird umhüllt von sämtlichen Strahlentripeln, welche die je drei Seiten jedes Polardreiseits bilden, das irgend zwei Kegelschnitten des Gewebes gemeinsam ist.

Die Kurve $C^{(3)}$ wird erfüllt von sämtlichen Punkttripeln, welche die Ecken jedes Polardreiecks bilden, das irgend zwei Kegelschnitten des Netzes gemeinsam ist.

Alle diese Resultate folgen durch duales Übertragen aus den bereits früher abgeleiteten. Den vermittelnden Zusammenhang der dual gegenüberstehenden Gebilde, einerseits des Kegelschnittgewebes und des Kegelschnittnetzes, andererseits der Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$, bildet der Satz:

Jedes Punktepaar, welches als ausgearteter Kegelschnitt des Gewebes auftritt, ist ein Paar konjugierter Punkte für sämtliche Kegelschnitte des Netzes, und jedes Linienpaar, welches als ausgearteter Kegelschnitt des Netzes auftritt, ist ein Paar konjugierter Strahlen für sämtliche Kegelschnitte des Gewebes.

Je zwei konjugierte Punkte der $C^{(3)}$ (ausgearteter Kegelschnitt des Gewebes) werden durch je zwei konjugierte Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ (ausgearteter Kegelschnitt des Netzes) harmonisch getrennt.

3. Der Zusammenhang der Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ des Gewebes mit den Kegelschnitten $K^{(2)}$ des Netzes tritt noch vollständiger hervor durch folgende Betrachtung:

Nehmen wir irgend drei Kegelschnitte

$$\mathfrak{A}^{(2)}, \quad \mathfrak{B}^{(2)}, \quad \mathfrak{C}^{(2)}$$

des Gewebes, welche dasselbe bestimmen, also nicht einer Schar angehören, so bestimmen die beiden Kegelschnitte

$$\mathfrak{B}^{(2)} \text{ und } \mathfrak{C}^{(2)}$$

eine Schar, die ein gemeinsames Polardreieck hat; wir bezeichnen die Ecken desselben mit

$$\mathfrak{x}, \ \mathfrak{y}, \ \mathfrak{z}$$

und die Seiten mit

$$|\,\mathfrak{y}\mathfrak{z}\,| = x, \quad |\,\mathfrak{z}\mathfrak{x}\,| = y, \quad |\,\mathfrak{x}\mathfrak{y}\,| = z,$$

dann sind x, y, z Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$, wie wir wissen (denn die drei Pole von x in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ liegen auf einer Geraden u. s. w.).

Sei also der Pol von x in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$ der Punkt $\mathfrak{x}_1$
und " " " y " " " $\mathfrak{A}^{(2)}$ " " $\mathfrak{y}_1$
" " " " z " " " $\mathfrak{A}^{(2)}$ " " $\mathfrak{z}_1$,

dann werden

$$|\,\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\,| = x_1, \quad |\,\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\,| = y_1, \quad |\,\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1\,| = z_1$$

die konjugierten Tangenten zu x, y, z sein für die Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$, sodass also

$$xx_1, \quad yy_1, \quad zz_1$$

drei Paare konjugierter Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ sind. Da nun aber für den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ das Dreieck $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1$ die Polarfigur des Dreiseits xyz ist, dessen Ecken $(yz) = \mathfrak{x}$, $(zx) = \mathfrak{y}$, $(xy) = \mathfrak{z}$ sind, so müssen sich nach einem bekannten Satze (Th. d. K. S. 155) die drei Verbindungslinien $|\,\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1|$, $|\,\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1|$, $|\,\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1|$, d. h.

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1$$

in einem Punkte $\mathfrak{t}$ schneiden, weil ein Dreieck und seine Polarfigur rücksichtlich eines Kegelschnitts allemal perspektiv liegen.

Wir haben daher folgende vier Punkte

$$(xyz_1) = \mathfrak{z},$$
$$(yzx_1) = \mathfrak{x},$$

$$(zxy_1) = \mathfrak{y},$$
$$(x_1 y_1 z_1) = \mathfrak{t},\ \text{d. h.}$$

die drei Linienpaare

$$xx_1,\quad yy_1,\quad zz_1$$

gehören als drei Seitenpaare einem vollständigen Viereck ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}$) an, und da diese drei Linienpaare drei ausgeartete Kegelschnitte des Netzes sind, so sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, welches dem Netze angehört. Dies giebt folgenden Satz:

Wenn man von zwei Kegelschnitten des Gewebes das gemeinsame Polardreieck ermittelt, dessen drei Seiten Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ sind, so schneiden sich die zu denselben drei konjugierten Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ in einem Punkte, und derselbe bildet mit den drei Ecken des Polardreiecks ein vollständiges Viereck, die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, welches dem Netze angehört.

Und dual gegenüber:

Wenn man von zwei Kegelschnitten des Netzes das gemeinsame Polardreieck ermittelt, dessen drei Ecken Punkte der $C^{(3)}$ sind, so schneiden die drei Seiten desselben die $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten, welche auf einer Geraden liegen (diese sind nämlich die drei konjugierten Punkte der $C^{(3)}$ zu den Ecken des Polardreiecks). Diese neue Gerade bildet zusammen mit den drei Seiten des Polardreiecks die vier Seiten eines vollständigen Vierseits, dem eine Kegelschnittschar einbeschrieben werden kann, welche dem Gewebe angehört.

4. Ebenso, wie wir in 3. nur die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{B}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$ des Gewebes in Betracht zogen, können wir jetzt die beiden Kegelschnitte

$$\mathfrak{C}^{(2)}\quad \text{und}\quad \mathfrak{A}^{(2)}$$

nehmen und von ihnen ausgehend dieselbe Betrachtung anstellen; dann erhalten wir ein zweites Kegelschnittbüschel des Netzes mit den vier Grundpunkten $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{t}'$, und da zwei Kegelschnitte des Netzes immer einen gemeinsamen

Kegelschnitt haben müssen, d. h. auch ihre Grundpunkte selbst auf einem Kegelschnitt liegen (2.) so sehen wir, daß die acht Punkte

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \mathfrak{t},\ \mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}',\ \mathfrak{z}',\ \mathfrak{t}'$$

auf einem Kegelschnitt des Netzes liegen müssen; dieser ist schon durch die sechs Punkte

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \mathfrak{x}',\ \mathfrak{y}',\ \mathfrak{z}',$$

die Ecken zweier Polardreiecke rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$, mehr als bestimmt; bekanntlich liegen solche sechs Punkte immer auf einem Kegelschnitt. Daß dieser nun dem Netze angehört, ist das gewonnene Resultat, durch welches die Kegelschnitte des Gewebes zu denen des Netzes in eine enge Verbindung treten, was sich folgendermaßen aussprechen läßt:

Irgend zwei Kegelschnitte des Gewebes haben ein gemeinsames Polardreieck; nimmt man zwei solche Polardreiecke, so liegen die sechs Ecken derselben auf einem Kegelschnitt des Netzes.

Und andererseits:

Irgend zwei Kegelschnitte des Netzes haben ein gemeinsames Polardreieck; nimmt man irgend zwei solche Polardreiecke, so berühren ihre sechs Seiten allemal einen Kegelschnitt des Gewebes.

Hiernach lassen sich aus drei zur Bestimmung des Gewebes notwendigen und hinreichenden Kegelschnitten sofort drei Kegelschnitte ermitteln, welche das zugehörige Netz bestimmen oder umgekehrt, was keiner weiteren Ausführung bedarf.

5. Wir wollen noch auf einen unmittelbaren Zusammenhang der Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ hinweisen.

Aus jedem Punkte $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ gehen im allgemeinen drei Tangenten an die $\mathfrak{K}^{(3)}$, nämlich die Verbindungslinie $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$, welche $\mathfrak{P}$ mit seinem konjugierten Punkte $\mathfrak{P}_1$ verbindet und außerdem die beiden Doppelstrahlen derjenigen Strahleninvolution, welche dem Punkte $\mathfrak{P}$ rücksichtlich sämtlicher Paare konjugierter Punkte auf $C^{(3)}$ zugehört.

Wir wollen jetzt nach solchen besonderen Punkten $\mathfrak{T}$ der $C^{(3)}$ fragen, für welche der erste Strahl mit einem der beiden letzteren zusammenfällt. Wäre dies der Fall und $\mathfrak{T}_1$ der konjugierte Punkt zu $\mathfrak{T}$, so müßte $|\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1|$ ein Doppelstrahl der zu $\mathfrak{T}$ zugehörigen Strahleninvolution sein; die beiden übrigen Punkte, in welchen dieser von $\mathfrak{T}$ ausgehende Doppelstrahl die $C^{(3)}$ trifft, müßten also konjugierte Punkte sein; einer derselben ist nun $\mathfrak{T}_1$, der andere müßte sein konjugierter Punkt, d. h. $\mathfrak{T}$ selbst sein; also müßte die Gerade $|\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1|$ in $\mathfrak{T}$ die $C^{(3)}$ berühren; wenn also ein Punkt $\mathfrak{T}$ von der verlangten Art auf der $C^{(3)}$ existiert, so muß seine Tangente als dritten Schnittpunkt mit der $C^{(3)}$ den konjugierten Punkt $\mathfrak{T}_1$ haben.

Eine solche Gerade $|\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1|$ ist aber zugleich Tangente der $\mathfrak{K}^{(3)}$ und hat ihren Berührungspunkt mit derselben in dem vierten harmonischen zu $\mathfrak{T}_1$ zugeordneten Punkt (§ 6, 3) rücksichtlich des Paares $\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1$. Da nun von den vier harmonischen Punkten in $\mathfrak{T}$ zwei zusammenfallen, so muß auch der dritte in denselben hineinfallen, während der vierte $\mathfrak{T}_1$ getrennt liegt. Hieraus erkennen wir, daß die Gerade $|\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1|$ in $\mathfrak{T}$ auch die Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ berührt, also:

Die Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ berühren sich in denjenigen Punkten, in welchen sie sich begegnen (d. h. sie haben in jedem solchen Punkte dieselbe Tangente); die Anzahl ihrer gemeinschaftlichen Punkte reduziert sich also, da sie paarweise zusammenfallen, auf die Hälfte $\left(\frac{3 \cdot 6}{2} = 9\right)$.

Der zu einem solchen Punkte $\mathfrak{T}$ konjugierte Punkt $\mathfrak{T}_1$ der $C^{(3)}$ und die zu einer solchen Tangente t konjugierte Tangente t_1 der $\mathfrak{K}^{(3)}$ besitzen eine merkwürdige Eigenschaft. Die Tangenten in zwei konjugierten Punkten der $C^{(3)}$ müssen sich bekanntlich wieder in einem Punkte auf der $C^{(3)}$ schneiden, also auch die beiden Tangenten in $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$; die Tangente in $\mathfrak{T}$ schneidet aber die $C^{(3)}$ nur noch in $\mathfrak{T}_1$, also muß die Tangente in $\mathfrak{T}_1$ ihren dritten Schnittpunkt mit der $C^{(3)}$ wieder in $\mathfrak{T}_1$ haben, d. h. $\mathfrak{T}_1$ muß ein Wende-

punkt der $C^{(3)}$ sein, oder die Tangente in demselben hat mit der Kurve drei zusammenfallende Punkte gemein. Wir schließen also:

Die zu den gemeinschaftlichen Punkten der $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ konjugierten Punkte der $C^{(3)}$ sind die Wendepunkte derselben, und ebenso:

Die zu den gemeinschaftlichen Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ und $C^{(3)}$ konjugierten Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ sind die Rückkehrtangenten derselben.

(Rückkehrtangente einer Kurve ist eine solche, für deren Berührungspunkt drei unendlich-benachbarte Tangenten in eine zusammenfallen.) Über die Anzahl, Realität und Konfiguration der Wendepunkte der $C^{(3)}$ (oder der Rückkehrtangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$) wird uns eine spätere Untersuchung aufklären. (§ 28.)

§ 8. Die $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ als Tripelkurven.

1. Wenn wir ein gemeinsames Polardreieck für irgend zwei Kegelschnitte des Netzes, also auch für das ganze durch dieselben bestimmte Büschel des Netzes ein Tripel von Punkten nennen, und wenn wir ein gemeinsames Polardreiseit für irgend zwei Kegelschnitte des Gewebes, also auch für die ganze durch dieselben bestimmte Schar des Gewebes ein Tripel von Strahlen nennen, so ordnen sich sowohl die Punkte der $C^{(3)}$ als auch die Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ zu Tripeln, in ähnlicher Weise wie sie früher durch die Paare konjugierter Punkte und konjugierter Tangenten sich zu Paaren ordneten. Solche Punkttripel der $C^{(3)}$ und Strahlentripel der $\mathfrak{K}^{(3)}$ besitzen ähnliche Eigenschaften, wie die vorigen Punkt- und Tangentenpaare. Die durchweg parallel laufende Betrachtung der dual gegenüberstehenden Gebilde doppelt durchzuführen erscheint überflüssig; wir werden uns daher vorzugsweise auf die Untersuchung der $C^{(3)}$ als Tripelkurve beschränken.

2. Wenn wir von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ die Polaren in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte eines Büschels

$$[B^{(2)}, \quad C^{(2)}],$$

welches dem Netze angehört, konstruieren, so laufen diese bekanntlich durch einen festen Punkt $\mathfrak{P}_1$ der $C^{(3)}$ und bilden ein einfaches Strahlbüschel $[\mathfrak{P}_1]$, welches mit dem Kegelschnittbüschel projektiv ist (§ 4, 5), sodaß zu jedem Kegelschnitt des Büschels ein bestimmter Strahl des Strahlbüschels $[\mathfrak{P}_1]$ zugehört; aber auch umgekehrt wird zu jedem beliebigen durch $\mathfrak{P}_1$ gezogenen Strahl g ein einziger bestimmter Kegelschnitt aus dem Büschel $[B^{(2)} C^{(2)}]$ zugehören, welcher durch die geforderte Bedingung vollständig und eindeutig bestimmt ist. Sei nun dieser Kegelschnitt des Büschels

$$A_1^{(2)},$$

für den $\mathfrak{P}$ und g Pol und Polare sind; in gleicher Weise können wir aus dem Büschel

$$[C^{(2)} \; A^{(2)}]$$

des Netzes den bestimmten einzigen Kegelschnitt

$$B_1^{(2)}$$

ermitteln, für welchen $\mathfrak{P}$ und g Pol und Polare sind; dann haben die beiden Kegelschnitte

$$A_1^{(2)} \quad \text{und} \quad B_1^{(2)}$$

gleichzeitig $\mathfrak{P}$ und g zu Pol und Polare, folglich auch das ganze durch sie bestimmte Büschel

$$[A_1^{(2)} \; B_1^{(3)}].$$

Mithin ist der willkürliche Punkt $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ ein Tripelpunkt (Eckpunkt eines gemeinschaftlichen Polardreiecks) für ein gewisses dem Netze angehöriges Kegelschnittbüschel, und die beiden andern Tripelpunkte (die beiden übrigen Ecken des gemeinsamen Polardreiecks) müssen natürlich auf g und gleichzeitig auf $C^{(3)}$ liegen; folglich sind sie die beiden übrigen Schnittpunkte der durch $\mathfrak{P}_1$ gezogenen Geraden g mit der $C^{(3)}$.

Da die Gerade g übrigens willkürlich durch den Punkt $\mathfrak{P}_1$ angenommen wurde, so wird auch noch ein zweiter Tripelpunkt auf der $C^{(3)}$ willkürlich anzunehmen sein; der dritte Tripelpunkt ist aber dann vollständig und eindeutig bestimmt. Wir dürfen demnach folgendes Resultat aussprechen:

Zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ der $C^{(3)}$ dürfen beliebig als Ecken eines Tripels derselben (gemeinsames

Polardreieck für gewisse zwei Kegelschnitte des Netzes) angenommen werden; der dritte Tripelpunkt $\mathfrak{R}$ wird dann eindeutig dadurch bestimmt, daß man $\mathfrak{Q}$ mit dem zu $\mathfrak{P}$ konjugierten Punkt $\mathfrak{P}_1$ der $C^{(3)}$ verbindet und den dritten Schnittpunkt $\mathfrak{R}$ ermittelt.

Hieraus folgt, da es nur einen dritten Tripelpunkt $\mathfrak{R}$ giebt, daß derselbe auch hervorgehen muß, wenn man $\mathfrak{P}$ mit dem zu $\mathfrak{Q}$ konjugierten Punkte $\mathfrak{Q}_1$ verbindet und den dritten Schnittpunkt dieser Verbindungslinie auf der $C^{(3)}$ aufsucht; also muß

$$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q},\ \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1) = \mathfrak{R}$$

sein, was denn auch bekanntlich ein Punkt der $C^{(3)}$ ist, weil $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ zwei Paare konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ sind; der zu $\mathfrak{R}$ konjugierte Punkt ist nun

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{Q},\ \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1) = \mathfrak{R}_1$$

und da somit $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ in gerader Linie liegen, so können wir den Satz aussprechen:

Schneidet eine beliebige Gerade die $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1$, so bilden die drei konjugierten Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ zu denselben allemal ein Tripel von Punkten der $C^{(3)}$.

Hieraus schließen wir auf die Mächtigkeit der Punkttripel einer $C^{(3)}$; sie ist nämlich gleichgroß mit der Mächtigkeit der Geraden, welche sich in der Ebene ziehen lassen (∞^2), eine doppelt-unendliche Mannigfaltigkeit.

Auch gilt der umgekehrte Satz:

Die zu drei Tripelpunkten einer $C^{(3)}$ konjugierten Punkte liegen allemal auf einer Geraden und sind nichts anderes, als die dritten Schnittpunkte der drei Seiten des Tripeldreiecks mit der $C^{(3)}$.

Da wir zwischen den sechs Punkten $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1$ vier Gerade

$$|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}|,\quad |\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}_1|,\quad |\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{R}|,\quad |\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1|$$

haben, so haben wir gleichzeitig vier Tripel

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{R}_1,\quad \mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R},\quad \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1,\quad \mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}.$$

3. Hieraus folgt zugleich eine charakteristische Eigenschaft jedes Punkttripels einer $C^{(3)}$.

Zuvörderst ist nämlich klar, daß irgend zwei Tripel der $C^{(3)}$ allemal sechs Punkte eines Kegelschnitts sein müssen, weil zwei Büschel des Netzes immer einen Kegelschnitt gemein haben und zwei Polardreiecke für einen Kegelschnitt selbst ihre sechs Ecken auf einem andern Kegelschnitt haben.

Gehen wir also von einem Tripel $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ der $C^{(3)}$ aus und bestimmen ein zweites $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'$ dadurch, daß wir $\mathfrak{P}'$ unendlich nahe an $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}'$ unendlich nahe an $\mathfrak{Q}$ heranrücken lassen, dann muß auch $\mathfrak{R}'$ unendlich nahe an $\mathfrak{R}$ heranrücken, denn es giebt nur einen dritten Tripelpunkt zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, der in $\mathfrak{R}$ hineinfallen muß; der Kegelschnitt, welcher in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die $C^{(3)}$ berührt, wird sie daher auch in $\mathfrak{R}$ berühren müssen, und wir erhalten den Satz:

Ein Tripel von Punkten der $C^{(3)}$ besitzt allemal die Eigenschaft, daß ein Kegelschnitt die $C^{(3)}$ in solchen drei Punkten berührt.

Nehmen wir insbesondere für zwei von den willkürlich zu wählenden Punkten eines Tripels der $C^{(3)}$ zwei konjugierte Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$, so wird der zugehörige dritte Tripelpunkt nach dem Vorigen der zu dem dritten Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ der Kurve mit der Verbindungslinie $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ konjugierte Punkt $\mathfrak{S}_1$ sein, d. h. derjenige, in welchem sich die beiden Tangenten an $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ schneiden; und in der That bilden auch die beiden Strahlen $|\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}|$ und $|\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}_1|$ einen ausgearteten Kegelschnitt, von dem man sagen darf, daß er die $C^{(3)}$ in den drei Punkten des Tripels $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{S}_1$ berührt, weil $\mathfrak{S}_1$ ein Doppelpunkt dieses Kegelschnitts ist. Hiernach treten also die Tripel in gewissem Sinne als Erweiterung des Begriffes der konjugierten Punktepaare auf.

Da zwei Punkte eines Tripels immer willkürlich auf der $C^{(3)}$ angenommen werden können, so läßt sich der obige Satz, wonach zwei Tripel sechs Punkte eines Kegelschnitts sind, auch so umkehren:

Legt man durch drei Tripelpunkte der $C^{(3)}$ einen beliebigen Kegelschnitt, so schneidet derselbe die $C^{(3)}$ allemal in drei neuen Punkten eines Tripels.

Hieraus geht gleichfalls die doppelt-unendliche Mannigfaltigkeit (∞^2) der Tripel hervor, und es läßt sich der Zusammenhang derselben übersehen.

Wir bemerken noch den aus dem Vorigen sich ergebenden Satz:

Hält man einen Punkt $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ als Eckpunkt eines Tripels fest, so giebt es zu ihm unendlich viele Paare von Punkten $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, welche die beiden übrigen Ecken des Tripels sind; diese liegen immer so auf der $C^{(3)}$, daß ihre Verbindungslinie $|\mathfrak{Q}\mathfrak{R}|$ durch einen und denselben festen Punkt der $C^{(3)}$ geht, nämlich den Punkt $\mathfrak{P}_1$, welcher zu $\mathfrak{P}$ konjugiert ist.

4. Gehen wir von zwei Paaren konjugierter Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ aus, welche das dritte Paar

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}) = \mathfrak{C}_1$$

liefern, so bestimmen die vier Geraden

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}|$$

eine Kegelschnittschar des Gewebes und bilden ein vollständiges Vierseit, dessen drei Diagonalen

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1|$$

sind; die Durchschnittspunkte derselben

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{a}, \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{b}, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{c}$$

bilden ein gemeinsames Polardreieck für sämtliche Kegelschnitte der Schar.

Nennen wir die dritten Schnittpunkte der $C^{(3)}$ mit den Geraden

$$\begin{matrix} |\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1| \\ \mathfrak{p}, & \mathfrak{q}, & \mathfrak{r} \end{matrix}$$

und nehmen aus der vorigen Kegelschnittschar, für welche $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ein Polardreieck ist, denjenigen besonderen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ heraus, welcher die Verbindungslinie

$$|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$$

berührt, dann geht aus $\mathfrak{p}$ an ihn die eine Tangente $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$ und das Paar konjugierter Strahlen $|\mathfrak{p}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}|$ rücksicht-

lich des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, weil $\mathfrak{a}$ der Pol von $|\mathfrak{p}\mathfrak{b}| \equiv |\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ ist; folglich ist die andere Tangente t aus $\mathfrak{p}$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ der vierte harmonische Strahl zu $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$ zugeordnet rücksichtlich des Paares $|\mathfrak{p}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{p}\mathfrak{a}|$.

Ebenso geht aus $\mathfrak{q}$ außer der Tangente $|\mathfrak{q}\mathfrak{p}|$ noch eine zweite Tangente t' an $\mathfrak{K}^{(2)}$, welche von jener harmonisch getrennt wird durch das Strahlenpaar $|\mathfrak{q}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{q}\mathfrak{b}|$.

Die beiden Tangenten t und t' schneiden sich in dem vierten harmonischen Punkt auf $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| \equiv |\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1|$, welcher von dem Schnittpunkt $(\mathfrak{p}\mathfrak{q}, \mathfrak{a}\mathfrak{b})$ harmonisch getrennt wird durch das Punktepaar $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Nennen wir diesen Schnittpunkt vorläufig

$$(tt') = \mathfrak{r}';$$

dann müssen, weil die Seiten der beiden Dreiecke

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1 \text{ und } \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}'$$

denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ berühren, ihre sechs Ecken auf einem Kegelschnitt liegen. Die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1$ bilden aber ein Punktetripel der $C^{(3)}$, weil ihre konjugierten Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}$ auf einer Geraden liegen (2.), also muß dieser Kegelschnitt der $C^{(3)}$ in drei weiteren Punkten begegnen, die ebenfalls ein Tripel bilden; von diesen sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei Ecken; zu ihnen giebt es nur einen einzigen bestimmten dritten Tripelpunkt und derselbe muß offenbar $\mathfrak{r}'$ sein, also auf $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}| \equiv |\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1|$ liegen; es giebt aber auf $|\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1|$ nur noch einen dritten Punkt der $C^{(3)}$, nämlich $\mathfrak{r}$, folglich muß identisch

$$\mathfrak{r}' \equiv \mathfrak{r}$$

sein, und wir erhalten den Satz:

Schneidet eine beliebige Gerade die $C^{(3)}$ in drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, deren konjugierte Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ seien, so bilden die drei Punktepaare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits; die drei Diagonalen desselben $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1|$ begegnen der $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, welche ein Tripel der $C^{(3)}$ bilden.

Da $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ Tripelpunkte der $C^{(3)}$ sind, so müssen ihre drei konjugierten Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{r}_1$ auf einer Geraden liegen.

Dies sind aber bekanntlich diejenigen drei Punkte, in welchen die Tangenten in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ (oder in $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$) zum dritten Mal der $C^{(3)}$ begegnen; wir erhalten daher den doppelten Satz:

Schneidet eine Gerade die $C^{(3)}$ in drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, so treffen die Tangenten in denselben die $C^{(3)}$ zum dritten Mal in drei neuen Punkten, welche wieder auf einer Geraden liegen, und:

Zieht man in drei Tripelpunkten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ einer $C^{(3)}$ die drei Tangenten, so treffen dieselben die $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

(Sind insbesondere die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ auf der unendlich entfernten Geraden g_∞ gelegen, werden also die drei Tangenten in den unendlich entfernten Punkten der $C^{(3)}$ die Asymptoten derselben, so müssen diese ebenfalls der $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten begegnen, welche auf einer Geraden liegen.)

5. Die letzten beiden Sätze sind nur spezielle Fälle von etwas allgemeineren, zu denen wir auf folgende Weise gelangen:

Schneide eine beliebige Gerade die $C^{(3)}$ in drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, deren konjugierte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ seien, und eine beliebige zweite Gerade die $C^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$, deren konjugierte $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{B}_1', \mathfrak{C}_1'$ seien, dann liegen bekanntlich (2.) diese zwölf Punkte zu je dreien auf folgenden acht Geraden

$$
\begin{aligned}
&|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}| = d, \quad &&|\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'| = d',\\
&|\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1| = a, \quad &&|\mathfrak{A}'\mathfrak{B}_1'\mathfrak{C}_1'| = a',\\
&|\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1| = b, \quad &&|\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_1'\mathfrak{A}_1'| = b',\\
&|\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1| = c, \quad &&|\mathfrak{C}'\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1'| = c',
\end{aligned}
$$

und diese acht Geraden berühren einen und denselben Kegelschnitt des Gewebes, wie wir wissen (§ 3, 5).

Aus sechs Tangenten des Kegelschnitts können wir ein Brianchonsches Sechsseit bilden und für dasselbe den Brianchonschen Punkt (Durchschnittspunkt der drei Verbindungslinien der Gegenecken) aufsuchen.

Wenn wir immer das Brianchonsche Sechsseit voran und den zugehörigen Brianchonschen Punkt als Durch-

schnittspunkt dreier Geraden darunter schreiben, so erhalten wir folgendes Schema:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{c} a\,d\,b\,a'\,d'\,b' \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|,\ |ab',\,ba'|; \end{array}\right.$$

$$2)\quad \left\{\begin{array}{c} b\,d\,c\,b'\,d'\,c' \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{C}'|,\ |bc',\,cb'|; \end{array}\right.$$

$$3)\quad \left\{\begin{array}{c} c\,d\,a\,c'\,d'\,a' \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{C}'|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|,\ |ca',\,ac'|; \end{array}\right.$$

$$4)\quad \left\{\begin{array}{c} b\,c\,a\,b'\,c'\,a' \\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|,\ |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|,\ |ab',\,ba'|; \end{array}\right.$$

$$5)\quad \left\{\begin{array}{c} c\,a\,b\,c'\,a'\,b' \\ |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|,\ |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1'|,\ |bc',\,cb'|; \end{array}\right.$$

$$6)\quad \left\{\begin{array}{c} a\,b\,c\,a'\,b'\,c' \\ |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1'|,\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|,\ |ca',\,ac'|; \end{array}\right.$$

$$7)\quad \left\{\begin{array}{c} a\,b'\,c\,a'\,b\,c' \\ |ab',\,ba'|,\ |bc',\,cb'|,\ |ca',\,ac'|. \end{array}\right.$$

Hieraus wird nun ersichtlich, daß die beiden Dreiseite

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{C}'| \quad \text{und}$$
$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|,\ |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|,\ |\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1'|$$

perspektive Lage haben, weil die drei Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken durch einen Punkt laufen [nach 7.)]; folglich müssen auch die drei Schnittpunkte ihrer entsprechenden Seiten auf einer Geraden liegen; nennen wir diese Schnittpunkte

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}',\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1') = \mathfrak{A}'',$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B}',\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1') = \mathfrak{B}'',$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{C}',\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1') = \mathfrak{C}'',$$

so sind dies offenbar die dritten Schnittpunkte der drei Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{C}'|$ mit der $C^{(3)}$. Wir erhalten also den doppelten Satz:

Trifft eine Gerade g die $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und eine beliebige zweite Gerade g' die $C^{(3)}$ in $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$, und man verbindet die drei ersten Punkte in irgend welcher Weise mit den drei letzten durch drei Gerade

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{C}'|,$$

so treffen diese drei Verbindungslinien die $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten einer Geraden.

(Die Zuordnung der drei ersten zu den drei andern Punkten ist dabei ganz irrelevant.)

Andererseits:

Hat man zwei beliebige Tripel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1'\mathfrak{C}_1'$ der $C^{(3)}$, und man verbindet die drei ersten Punkte in irgend welcher Weise mit den drei letzten durch drei Gerade $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|$, $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|$, $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1'|$, so treffen diese drei Verbindungslinien die $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten einer Geraden.

(Die Zuordnung der drei ersten Punkte zu den drei andern ist dabei ganz irrelevant.)

Fallen in diesen beiden Sätzen insbesondere die gestrichenen Punkte mit den ungestrichenen zusammen, so erhalten wir die Sätze von 4. Fügen wir noch zu den obigen Punkten $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$ ihre konjugierten $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{B}_1''$, $\mathfrak{C}_1''$ hinzu, nämlich

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1', \ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}') = \mathfrak{A}_1'',$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1', \ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}') = \mathfrak{B}_1'',$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1', \ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}') = \mathfrak{C}_1'',$$

so bilden offenbar $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{B}_1''$, $\mathfrak{C}_1''$ ein Tripel der $C^{(3)}$, und wir können den dritten Satz aussprechen:

Trifft eine Gerade g die $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, nimmt man ferner ein beliebiges Tripel $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}_1'$ der $C^{(3)}$, und verbindet die drei ersten Punkte in irgend einer Weise mit den drei letzten durch drei Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1'|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1'|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1'|$, so treffen diese drei Verbindungslinien die $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten, welche ein Tripel der $C^{(3)}$ bilden.

(Die Zuordnung der drei ersten Punkte zu den drei andern ist dabei ganz irrelevant.)

Auch diese Sätze sind nur spezielle Fälle von noch allgemeineren, zu denen wir im nächsten Paragraphen gelangen.

§ 9. Erzeugung der $C^{(3)}$ vermittelst eines Kegelschnittbüschels und eines mit ihm projektiven Strahlbüschels.

1. Nehmen wir irgend vier Punkte der $C^{(3)}$

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D}$$

und ziehen die Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$, welche resp. in $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ der Kurve zum dritten Mal begegnen, so müssen nach dem in § 8, 5 bewiesenen Satze die drei Verbindungslinien $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$ und $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$ der $C^{(3)}$ in drei Punkten einer Geraden begegnen; ebenso müssen auch $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ und $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$ der $C^{(3)}$ in drei Punkten einer anderen Geraden begegnen; treffen also die sechs Seiten des vollständigen Vierecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, nämlich

$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{B}\rvert$	die	Kurve	$C^{(3)}$	in	$\mathfrak{c}_1$,
$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{D}\rvert$	„	„	„	„	$\mathfrak{c}_2$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{C}\rvert$	„	„	„	„	$\mathfrak{b}_1$,
$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{D}\rvert$	„	„	„	„	$\mathfrak{b}_2$,
$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{C}\rvert$	„	„	„	„	$\mathfrak{a}_1$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{D}\rvert$	„	„	„	„	$\mathfrak{a}_2$,

so müssen sich

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|,\quad |\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|,\quad |\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$$

in einem und demselben Punkte $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$ begegnen. Diese drei Geraden sind also drei Strahlen eines Strahlbüschels $\mathfrak{O}$; die drei Linienpaare

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \text{ und } |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{C}\mathfrak{B}| \text{ und } |\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$$

können wir als drei ausgeartete Kegelschnitte des Büschels mit den vier Grundpunkten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ auffassen und den drei Strahlen des Strahlbüschels $\mathfrak{O}$ entsprechend setzen; durch drei Paare entsprechender Elemente ist eine projektive Beziehung zweier Gebilde gerade bestimmt. Wenn wir demgemäß das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ auf die in § 4, 5 angegebene Weise auf ein einfaches Strahlbüschel reduzieren und dasselbe mit dem Strahlbüschel $\mathfrak{O}$ durch diese drei Paare entsprechender Elemente in projektive Beziehung setzen, so haben wir dadurch das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ selbst auf das Strahlbüschel $\mathfrak{O}$ projektiv bezogen, so daß

den drei Linienpaaren desselben die drei Strahlen $|\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{O}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2|$, $|\mathfrak{O}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2|$ des Strahlbüschels $\mathfrak{O}$ entsprechen. Nun wird jedem Kegelschnitt des Büschels $[\mathfrak{ABCD}]$ ein bestimmter Strahl des Strahlbüschels $\mathfrak{O}$ und umgekehrt entsprechen, und wir können nach dem gesamten Orte der Durchschnittspunkte entsprechender Elemente der beiden projektiven Gebilde fragen.

Dieser ist eine Kurve dritter Ordnung $C_1^{(3)}$, denn eine beliebige Gerade g schneidet das Kegelschnittbüschel in einer Punktinvolution, das Strahlbüschel $\mathfrak{O}$ in einer einfachen Punktreihe und beide Gebilde stehen in projektiver Beziehung; sie haben aber, wie wir in § 4, 3 gesehen haben, im Allgemeinen drei incidente Punkte, in welchen ein Punkt der Punktreihe mit einem Punkte des entsprechenden Punktepaares der Punktinvolution zusammenfallen, und diese drei Punkte gehören dem gesuchten Orte an; derselbe ist also von der dritten Ordnung. [Wir können uns auch in folgender Weise davon überzeugen, daß das Erzeugnis beider projektiver Gebilde eine Kurve dritter Ordnung ist: Die beliebige Gerade g schneidet die Kegelschnitte des Büschels $[\mathfrak{ABCD}]$ in den Punktepaaren $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ einer Punktinvolution; die Strahlenpaare $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}_1|$, $|\mathfrak{O}\mathfrak{x}_2|$ liefern eine Strahleninvolution; ein beliebiger durch $\mathfrak{O}$ gelegter Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ schneidet das Strahlenpaar in $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$ und die Durchbohrungssehne $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ läuft durch einen festen Punkt $\mathfrak{S}$ und beschreibt ein Strahlbüschel, auf welches das Kegelschnittbüschel reduziert wird. Dieses Strahlbüschel $[\mathfrak{S}]$ ist mit dem Strahlbüschel $[\mathfrak{O}]$ projektiv unserer Annahme gemäß, und die beiden projektiven Strahlbüschel $[\mathfrak{S}]$ und $[\mathfrak{O}]$ erzeugen daher einen Kegelschnitt $K^{(2)}$, welcher mit dem vorigen $\mathfrak{K}^{(2)}$ außer $\mathfrak{O}$ noch drei Punkte im allgemeinen gemeinschaftlich hat. Dieselben mit $\mathfrak{O}$ verbunden geben drei Strahlen, welche offenbar g in den gesuchten drei Punkten des Ortes treffen, welche auf g liegen. Der erzeugte Ort ist daher eine Kurve dritter Ordnung, weil er auf jeder beliebigen Geraden drei Punkte hat, von denen immer einer reell sein muß, während die beiden andern auch konjugiert-imaginär sein können.] Das Er-

zeugnis geht, wie unmittelbar einleuchtet, durch die vier Grundpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ des Kegelschnittbüschels und durch den Mittelpunkt $\mathfrak{O}$ des Strahlbüschels, und enthält die sechs Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, also schon elf Punkte unserer $C^{(3)}$.

Da aber zwei Kurven dritter Ordnung nicht mehr als $3 . 3 = 9$ Punkte gemein haben können, ohne identisch zusammenzufallen, so ist die erzeugte Kurve $C_1^{(3)}$ mit unserer $C^{(3)}$ identisch. Hieraus erkennen wir den fundamentalen Satz:

Wenn wir durch irgend vier Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ einer $C^{(3)}$ ein Büschel von Kegelschnitten legen, von denen jeder der Kurve noch in zwei weiteren Punkten $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ begegnet, so läuft die Sehne $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2|$ beständig durch einen festen Punkt $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$ und beschreibt ein Strahlbüschel, welches mit dem Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ projektiv ist.

Wir wollen den von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ abhängigen Punkt $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$, der schon durch zwei Linienpaare bestimmt wird, den *Gegenpunkt des Punktquadrupels* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ nennen.

2. Wir können das gewonnene Resultat auch anders auffassen:

Gehen wir von vier beliebigen Punkten der $C^{(3)}$ aus

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{O}$$

und mögen die Geraden

$\vert\mathfrak{B}\mathfrak{C}\vert$	der $C^{(3)}$ zum dritten Mal begegnen in	$\mathfrak{a}_1$,
$\vert\mathfrak{C}\mathfrak{A}\vert$	„ „ „ „ „ „ „	$\mathfrak{b}_1$,
$\vert\mathfrak{A}\mathfrak{B}\vert$	„ „ „ „ „ „ „	$\mathfrak{c}_1$,
$\vert\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1\vert$	„ „ „ „ „ „ „	$\mathfrak{a}_2$,
$\vert\mathfrak{O}\mathfrak{b}_1\vert$	„ „ „ „ „ „ „	$\mathfrak{b}_2$,
$\vert\mathfrak{O}\mathfrak{c}_1\vert$	„ „ „ „ „ „ „	$\mathfrak{c}_2$,

so werden nach dem obigen Satze (§ 8, 5), weil

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{c}_1$ auf einer Geraden liegen

und

$\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{O}$ „ „ „ „

auch die dritten Schnittpunkte von

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{b}_1|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|,\quad |\mathfrak{O}\mathfrak{c}_1|$$

auf einer Geraden liegen müssen; der erste ist $\mathfrak{C}$, der dritte $\mathfrak{c}_2$, also schneiden sich $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2|$ in einem Punkte der $C^{(3)}$.

Weil ebenso

$\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{a}_1$ auf einer Geraden liegen

und

$\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{O}$ „ „ „ „

so müssen auch die dritten Schnittpunkte von

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{c}_1|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2|, \quad |\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1|$$

auf einer Geraden liegen; der erste ist $\mathfrak{A}$, der dritte $\mathfrak{a}_2$, also schneiden sich $|\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2|$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_2|$ in einem Punkte der $C^{(3)}$. Der Strahl $|\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2|$ enthält aber nur noch einen dritten Kurvenpunkt $\mathfrak{D}$, also schneiden sich

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_2|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2|$$

in einem und demselben Punkte $\mathfrak{D}$ der Kurve $C^{(3)}$. Jetzt ist wiederum $\mathfrak{O}$ der Gegenpunkt des Punktquadrupels $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, also jeder durch $\mathfrak{O}$ gezogene Strahl des Strahlbüschels muß $C^{(3)}$ in zwei Punkten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ begegnen, welche mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ auf einem Kegelschnitt des Büschels $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ liegen, und wir erhalten den Satz:

Nimmt man auf einer $C^{(3)}$ drei beliebige Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und zieht durch einen beliebigen vierten Punkt $\mathfrak{O}$ derselben Strahlen, deren jeder in zwei weiteren Punkten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ der $C^{(3)}$ begegnet, so wird der veränderliche Kegelschnitt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2]$, welcher durch diese fünf Punkte bestimmt wird, noch durch einen vierten festen Punkt $\mathfrak{D}$ der $C^{(3)}$ laufen und ein Kegelschnittbüschel beschreiben, welches mit dem Strahlbüschel $[\mathfrak{O}]$ projektiv ist.

3. Aus der Erzeugung der $C^{(3)}$ vermittelst eines Kegelschnittbüschels und eines mit demselben projektiven Strahlbüschels können wir auch zurückgelangen zur ursprünglichen Erzeugung der $C^{(3)}$ (§ 3) vermittelst zweier Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halb-perspektiver Lage, wenn wir die Grundpunkte des Büschels zweckmäßig wählen.

Seien die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ und der zugehörige Gegenpunkt $\mathfrak{P}_1$, so wird dem besonderen Kegelschnitt des Büschels, welcher durch $\mathfrak{P}_1$ geht, als entsprechender Strahl des Strahlbüschels $\mathfrak{P}_1$ die Tangente der

$C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{P}_1$ zugehören. Wenn also diese Tangente der $C^{(3)}$ zum dritten Male in $\mathfrak{T}$ begegnet, so müssen die sechs Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{T}$ auf einem Kegelschnitt liegen. In gleicher Weise müßte, wenn wir für die Grundpunkte eines erzeugenden Kegelschnittbüschels $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1$ wählten und $\mathfrak{P}$ der zugehörige Gegenpunkt wäre, der durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ gelegte Kegelschnitt als sechsten Schnittpunkt mit der $C^{(3)}$ denjenigen Punkt haben, in welchem die Tangente in $\mathfrak{P}$ an der $C^{(3)}$ derselben zum dritten Mal begegnet. Nun schneidet aber der durch die fünf Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ gelegte Kegelschnitt die $C^{(3)}$ nur noch in einem einzigen sechsten Punkte $\mathfrak{T}$, also müssen die beiden Tangenten der $C^{(3)}$ in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ sich in einem Punkte $\mathfrak{T}$ der $C^{(3)}$ begegnen.

Dies ist der Fall, wenn wir für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ ein Paar konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ wählen (§ 2, 7); nehmen wir dies an, so hat sowohl das Büschel

$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}]$ den Gegenpunkt $\mathfrak{P}_1$, als auch
$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1]$ „ „ $\mathfrak{P}$.

Da aber $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{T}$ selbst ein Tripel von Punkten der $C^{(3)}$ bilden (§ 8, 3) und der durch dieselben gelegte Kegelschnitt der $C^{(3)}$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ begegnet, so müssen auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ein Tripel der $C^{(3)}$ bilden (§ 8, 3), und wir erhalten den Satz:

Legt man durch ein Punktetripel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ der $C^{(3)}$ und einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ derselben ein Büschel von Kegelschnitten, deren jeder der $C^{(3)}$ noch in zwei weiteren Punkten begegnet, so läuft die unveränderliche Verbindungslinie der letzteren durch einen festen Punkt $\mathfrak{P}_1$ der $C^{(3)}$, den konjugierten zu $\mathfrak{P}$ und beschreibt daher ein einfaches Strahlbüschel $\mathfrak{P}_1$, welches mit dem Kegelschnittbüschel projektiv ist; ebenso wie für das Punktquadrupel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}]$ der Gegenpunkt $\mathfrak{P}_1$ ist, ist auch für das Punktquadrupel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1]$ der Gegenpunkt $\mathfrak{P}$. Wir erzeugen hierdurch die $C^{(3)}$ in doppelter Weise vermittelst eines Kegelschnittbüschels und eines mit ihm projektiven Strahlbüschels.

4. Legen wir nun durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ einen beliebigen Kegelschnitt und lassen denselben von dem entsprechenden Strahle

des Strahlbüschels $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ durchschneiden, so gehören diese Punkte vermöge der Erzeugung der $C^{(3)}$ aus dem Kegelschnittbüschel und dem mit ihm projektiven Strahlbüschel der $C^{(3)}$ an. Schneidet $|\mathfrak{P}\mathfrak{x}_1|$ die $C^{(3)}$ zum dritten Mal in $\mathfrak{y}_2$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{x}_2|$ die $C^{(3)}$ zum dritten Mal in $\mathfrak{y}_1$, so müssen infolge der zweiten Erzeugung auch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2$$

auf einem Kegelschnitt liegen, dessen entsprechender Strahl $|\mathfrak{P}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2|$ ist, und

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1$$

auf einem Kegelschnitt liegen, dessen entsprechender Strahl $|\mathfrak{P}\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1|$ ist.

Da aber $\mathfrak{P}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2$ auf einer Geraden liegen, $\mathfrak{P}\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1$ auf einer zweiten Geraden liegen, so werden nach unserm obigen Satze auch die dritten Schnittpunkte der drei Verbindungslinien $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}|$, $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2|$, $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ auf einer dritten Geraden liegen müssen. Nun ist $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}|$ die Tangente in $\mathfrak{P}$, welche in $\mathfrak{T}$ schneidet; $|\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2|$ schneidet in $\mathfrak{P}_1$, also muß $|\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|$ durch den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{T}\mathfrak{P}_1|$ gehen; dieser ist aber $\mathfrak{P}_1$ selbst, weil $|\mathfrak{T}\mathfrak{P}_1|$ die Tangente in $\mathfrak{P}_1$ sein soll; also folgt, daß auch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$ auf einer Geraden liegen, und mithin $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$ auf dem entsprechenden Kegelschnitt bei der ersten Erzeugungsart.

Die vier Geraden

$$|\mathfrak{P}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2|,\quad |\mathfrak{P}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2|,\quad |\mathfrak{P}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2|,\quad |\mathfrak{P}\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1|$$

bilden ein vollständiges Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2$ sind.

Wenn wir nunmehr auf den vier Seiten zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ die zugeordneten vierten harmonischen Punkte aufsuchen, nämlich

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{P}_1\mathfrak{z}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{P}_1\mathfrak{z}_2) = -1,$$
$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{P}\mathfrak{t}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1\mathfrak{P}\mathfrak{t}_2) = -1,$$

so bilden $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2$ ein Viereck, und es liegen bekanntlich

$\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{P}$ auf einer Geraden,
$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{P}_1$ „ „ „

und die Schnittpunkte

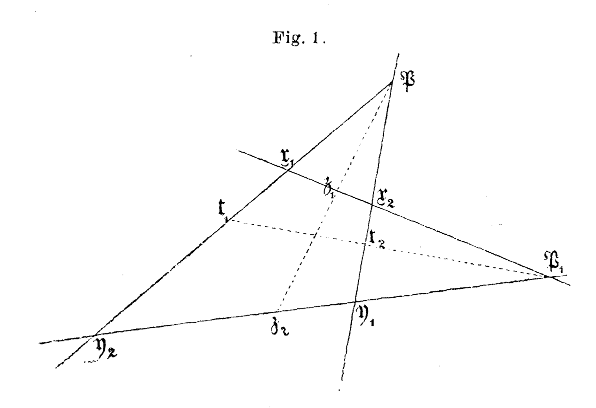


$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2) \equiv (\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2)$$

sind bekanntlich identisch (Fig. 1).

Lassen wir in die Figur die Bewegung eintreten, welche durch die projektive Beziehung der erzeugenden Gebilde gegeben ist, so verändern sich mit $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$ auch $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2$, aber es laufen $|\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2|$ durch den festen Punkt $\mathfrak{P}$ und $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ durch den festen Punkt $\mathfrak{P}_1$.

Fig. 1.



Wegen der harmonischen Beziehung geht durch $\mathfrak{z}_1$ die Polare von $\mathfrak{P}_1$ rücksichtlich des Kegelschnitts $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2]$, und $\mathfrak{z}_1$ selbst ist der Schnittpunkt dieser Polare mit dem entsprechenden Strahle $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2|$. Da die Polaren von $\mathfrak{P}_1$ in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}]$ ein Strahlbüschel beschreiben, welches mit dem Kegelschnittbüschel projektiv ist, dieses aber mit dem Strahlbüschel $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2|$ projektiv ist, so folgt, daß der Punkt $\mathfrak{z}_1$ bei der Bewegung einen Kegelschnitt (das Erzeugnis zweier projektiven Strahlbüschel) beschreibt. Denselben Kegelschnitt beschreibt offenbar auch $\mathfrak{z}_2$; die veränderliche Sehne $|\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2|$ dieses Kegelschnitts läuft aber durch den festen Punkt $\mathfrak{P}$, folglich wird das Strahlenpaar

$$|\mathfrak{P}_1\mathfrak{z}_1| \equiv |\mathfrak{P}_1\mathfrak{x}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{P}_1\mathfrak{z}_2| \equiv |\mathfrak{P}_1\mathfrak{y}_2|$$

eine Strahleninvolution beschreiben; wir können also den Satz aussprechen:

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ zwei Punkte der $C^{(3)}$, deren Tangenten sich in einem Punkte $\mathfrak{T}$ der Kurve schneiden, und dreht man um $\mathfrak{P}$ einen Strahl, welcher in $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ der $C^{(3)}$ begegnet, so beschreibt das Strahlenpaar $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{x}_1|$, $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{y}_2|$ eine Strahleninvolution.

In ganz gleicher Weise erkennen wir, daß das Strahlenpaar

$$|\mathfrak{P}\mathfrak{t}_1| \equiv |\mathfrak{P}\mathfrak{x}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{P}\mathfrak{t}_2| \equiv |\mathfrak{P}\mathfrak{x}_2|$$

bei der projektiven Bewegung eine Strahleninvolution beschreibt Diese beiden Strahleninvolutionen $[\mathfrak{P}]$ und $[\mathfrak{P}_1]$ sind beziehungsweise projektiv mit den von $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2|$ beschriebenen einfachen Strahlbüscheln. Diese beiden Strahlbüschel selbst sind aber projektiv (und zwar perspektiv gelegen); denn für die Strahleninvolution $[\mathfrak{P}]$ wird jedes Strahlenpaar $|\mathfrak{P}\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{x}_2|$ durch den festen Strahl $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ und den veränderlichen Strahl $|\mathfrak{P}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2|$ harmonisch getrennt; folglich ist das von $|\mathfrak{P}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2|$ beschriebene Strahlbüschel mit der von $|\mathfrak{P}\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{x}_2|$ beschriebenen Strahleninvolution projektiv; mit letzterer ist aber auch das Strahlbüschel $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ projektiv; folglich sind die beiden von $|\mathfrak{P}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2|$ und von $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ beschriebenen Strahlbüschel projektiv und daher auch die beiden Strahleninvolutionen $[\mathfrak{P}]$ und $[\mathfrak{P}_1]$.

Sie befinden sich aber auch in halbperspektiver Lage, weil dem besonderen Kegelschnitt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{T}],$$

welcher beiden Büscheln $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}]$ und $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1]$ gleichzeitig angehört, für das eine das Strahlenpaar $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{T}|$ und $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}|$, für das andere das Strahlenpaar $|\mathfrak{P}\mathfrak{T}|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ zugehört, und da dies entsprechende Strahlenpaare der beiden projektiven Involutionen $[\mathfrak{P}]$ und $[\mathfrak{P}_1]$ sind und den Strahl $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1| \equiv |\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}|$ gemein haben, so befinden sich die Involutionen in halbperspektiver Lage.

Hierdurch ist der Nachweis geliefert für die Identität der Erzeugnisse bei den beiden verschiedenen Erzeugungsweisen; die Punkte $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$ erscheinen in der Weise geordnet:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \text{ und } \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$$

als Durchschnittspunkte entsprechender Elemente aus dem Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}]$ und dem ihm projektiven Strahlbüschel $\mathfrak{P}_1$; in der Weise geordnet:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2 \text{ und } \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1$$

als Durchschnittspunkte entsprechender Elemente aus dem Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1]$ und dem ihm projektiven Strahlbüschel $\mathfrak{P}$; in der Weise geordnet:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 \text{ und } \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2$$

als Durchschnittspunkte entsprechender Strahlenpaare zweier Strahleninvolutionen $[\mathfrak{P}]$ und $[\mathfrak{P}_1]$ in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage.*

5. Aus dieser allgemeinen Erzeugungsweise der $C^{(3)}$ vermittelst eines Kegelschnittbüschels und eines mit demselben projektiven Strahlbüschels ergeben sich eine Menge Folgerungen, von denen wir einige hervorheben wollen.

Wenn wir einen beliebigen Kegelschnitt aus dem erzeugenden Büschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ herausnehmen und seine beiden übrigen Schnittpunkte mit $C^{(3)}$ durch $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ bezeichnen, so werden, weil auch das Linienpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ dem Büschel angehört, die beiden dritten Schnittpunkte auf diesen Geraden in einer neuen Geraden liegen mit dem Gegenpunkt des Punktquadrupels $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, also auch mit dem dritten Schnittpunkt auf $|\mathfrak{E}\mathfrak{F}|$. Dies giebt den Satz:

S c h n e i d e t ein Kegelschnitt die $C^{(3)}$ in sechs Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ und zieht man drei Sehnen $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$, $|\mathfrak{E}\mathfrak{F}|$, so schneiden dieselben die $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten, welche in einer Geraden liegen. (Die Gruppierung der sechs Punkte zu je zweien ist dabei völlig irrelevant); oder umgekehrt:

Schneidet eine Gerade die $C^{(3)}$ in drei Punkten, durch deren jeden eine neue Gerade gezogen wird, welche der $C^{(3)}$ in zwei weiteren Punkten begegnet,

* F. Schur, Synthetischer Beweis für die Identität einer Tripelkurve etc. (Schlömilchs Zeitschr. Bd. XXIV.)

so liegen die dadurch erhaltenen sechs neuen Punkte auf einem Kegelschnitt.

Man kann insbesondere von diesen sechs Punkten drei in einen einzigen zusammenfallen lassen und erhält dann folgendes Ergebnis:

Schneidet eine Gerade die $C^{(3)}$ in drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und verbindet man dieselben mit einem beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ durch drei Gerade $|\mathfrak{P}\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{P}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{P}\mathfrak{C}|$, welche mit der $C^{(3)}$ die dritten Schnittpunkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ haben, dann wird ein Kegelschnitt, welcher durch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{P}$ geht und in $\mathfrak{P}$ die Tangente der $C^{(3)}$ berührt, notwendig in diesem Punkte mit der $C^{(3)}$ drei zusammenfallende Punkte, d. h. eine dreipunktige Berührung haben. Der Krümmungskreis dieses Kegelschnitts in $\mathfrak{P}$ wird also gleichzeitig Krümmungskreis für die $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{P}$ sein und kann demgemäß konstruiert werden.

6. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ die Grundpunkte des erzeugenden Kegelschnittbüschels und $\mathfrak{O}$ der zugehörige Gegenpunkt, also der Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels, so wird, wie schon in 4. bemerkt wurde, das Schnittpunktpaar $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ eines Büschelkegelschnitts mit dem entsprechenden Strahl des Strahlbüschels harmonisch getrennt durch $\mathfrak{O}$ und den Schnittpunkt der Polare von $\mathfrak{O}$ rücksichtlich des entsprechenden Kegelschnitts. Da aber bekanntlich die Polaren von $\mathfrak{O}$ in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels durch einen festen Punkt $\mathfrak{P}$ laufen und ein Strahlbüschel beschreiben, welches mit dem Kegelschnittbüschel projektiv ist, also auch mit dem erzeugenden Strahlbüschel $[\mathfrak{O}]$ projektiv sein muß, so erzeugen die Strahlbüschel $[\mathfrak{O}]$ und $[\mathfrak{P}]$ einen Kegelschnitt und wir erhalten den Satz:

Zieht man durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$ Strahlen, deren jeder in einem weiteren Punktepaare der $C^{(3)}$ begegnet, und bestimmt man zu $\mathfrak{O}$ den zugeordneten vierten harmonischen Punkt rücksichtlich des Punktepaars, so beschreibt derselbe einen Kegelschnitt, welcher durch $\mathfrak{O}$ geht und dieselbe Tangente in $\mathfrak{O}$ hat, wie die $C^{(3)}$.

Wir wollen diesen Kegelschnitt $\mathfrak{O}^{(2)}$ die **konische Polare** des Punktes $\mathfrak{O}$ nennen; da sie schon in $\mathfrak{O}$ zwei

zusammenfallende Punkte mit der $C^{(3)}$ gemein hat, so schneidet sie dieselbe im allgemeinen noch in vier weiteren Punkten, die mit $\mathfrak{O}$ verbunden offenbar vier Tangenten aus $\mathfrak{O}$ an die $C^{(3)}$ liefern, weil bei vier harmonischen Punkten, wenn zwei derselben zusammenfallen, auch der letzte in diesen hineinfallen muß. Wir schließen also:

Es gehen im allgemeinen aus einem Punkte $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$ außer der Tangente in $\mathfrak{O}$ selbst noch vier Tangenten an die $C^{(3)}$; die vier Berührungspunkte derselben liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{O}^{(2)}$, der konischen Polare von $\mathfrak{O}$, welcher in $\mathfrak{O}$ dieselbe Tangente hat mit $C^{(3)}$.

Nehmen wir einen dem Punkte $\mathfrak{O}$ unendlich nahen Punkt $\mathfrak{O}'$ der $C^{(3)}$ und legen aus ihm die vier neuen Tangenten an die Kurve, so erhalten wir vier neue den vorigen unendlich benachbarte Berührungspunkte, und der vorige Kegelschnitt kann auch aufgefaßt werden als gelegt durch die beiden Punkte $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}'$ und die vier Schnittpunkte je zweier unendlich naher Tangenten aus $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$, weil der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Tangenten an Stelle eines jeden der beiden Berührungspunkte gesetzt werden darf. Da nun solche sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, so muß das Doppelverhältnis des Tangentenquadrupels aus $\mathfrak{O}$ dem Doppelverhältnis des Tangentenquadrupels aus $\mathfrak{O}'$ gleich sein; und gehen wir von $\mathfrak{O}'$ zu einem neuen unendlich benachbarten Punkt $\mathfrak{O}''$ über und so fort auf der $C^{(3)}$, so behält das Doppelverhältnis des Tangentenquadrupels bei festgehaltener Zuordnung immer denselben Wert. Wir können also den Satz aussprechen:

Das Doppelverhältnis des Tangentenquadrupels aus einem Punkte $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$ für beliebige Zuordnung behält bei der Veränderung des Punktes $\mathfrak{O}$ auf der $C^{(3)}$, aber festgehaltener Zuordnung, immer denselben konstanten Wert. (Vergl. § 13, 3.)

Dies ist eine eigene charakteristische Konstante für die Kurve dritter Ordnung, und je nachdem dieses Doppelverhältnis ein harmonisches oder ein äquianharmonisches

ist, kann man eine solche $C^{(3)}$ eine harmonische oder äquianharmonische nennen und die Eigenschaften dieser besonderen Kurven $C^{(3)}$ aufsuchen. Auf die aus der Unveränderlichkeit dieses Doppelverhältnisses hervorgehenden weiteren Eigenschaften der allgemeinen $C^{(3)}$ werden wir noch später Gelegenheit haben näher einzugehen.

7. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zwei konjugierte Punkte der $C^{(3)}$, und konstruiert man in der angegebenen Weise ihre konischen Polaren $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{A}_1^{(2)}$, so wird, wenn die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ der $C^{(3)}$ zum dritten Mal in $\mathfrak{A}_2$ begegnet, der Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ durch den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{A}'$ gehen, wofern

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A} \mathfrak{A}') = -1$$

ist, und der Kegelschnitt $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ wird durch den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{A}_1'$ gehen, wofern

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_1') = -1$$

ist. Es ist also $\mathfrak{A}_2$ sowohl der vierte harmonische zu $\mathfrak{A}$ zugeordnete Punkt rücksichtlich des Paares $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_1'$, als auch der vierte harmonische zu $\mathfrak{A}_1$ zugeordnete Punkt rücksichtlich des Paares $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$. Die Polare von $\mathfrak{A}$ rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ geht also durch denselben Punkt $\mathfrak{A}_2$, wie die Polare von $\mathfrak{A}_1$ rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{A}^{(2)}$, nämlich durch den dritten Schnittpunkt $\mathfrak{A}_2$ von $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ mit der $C^{(3)}$.

Da ferner ein Strahlenpaar der zu $\mathfrak{A}$ zugehörigen Strahleninvolution und das entsprechende Strahlenpaar der zu $\mathfrak{A}_1$ zugehörigen Strahleninvolution sich in zwei Paaren konjugierter Punkte

$$\mathfrak{X} \text{ und } \mathfrak{X}_1, \quad \mathfrak{Y} \text{ und } \mathfrak{Y}_1$$

durchschneiden, der Schnittpunkt (Diagonalpunkt)

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1, \quad \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1) = \mathfrak{x}_1$$

aber auf den vierten harmonischen Strahlen durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, die dem gemeinsamen Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ zugeordnet sind rücksichtlich beider Strahlenpaare, liegen muß, wie aus der bekannten Eigenschaft des Vierseits folgt, so sind einerseits $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{A}_1$ konjugierte Punkte für den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$, anderseits $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{A}$ konjugierte Punkte für den Kegelschnitt $\mathfrak{A}_1^{(2)}$. Es ist



also die Gerade $|\mathfrak{x}_1 \mathfrak{A}_2|$, sowohl die Polare von $\mathfrak{A}_1$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$, als auch die Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}_1^{(2)}$. Wir erhalten also den Satz:

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zwei konjugierte Punkte der $C^{(3)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ die konischen Polaren jener Punkte, so ist die Polare von $\mathfrak{A}$ rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ identisch mit der Polare von $\mathfrak{A}_1$ rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{A}^{(2)}$.

Diese Gerade, welche durch den dritten Schnittpunkt $\mathfrak{A}_2$ von $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ mit der $C^{(3)}$ hindurchgeht

$$|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{x}_1| = x_1,$$

ist nichts anderes, als die uns bekannte gerade Linie l (§ 3, 1), welche die projektive Beziehung der beiden erzeugenden Strahleninvolutionen vermittelt und der wir hier eine neue Bedeutung abgewonnen haben.

Die allgemeine Giltigkeit des vorigen Satzes für zwei beliebige Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden wir später bei der Untersuchung der Polareigenschaften der $C^{(3)}$ kennen lernen (§ 21).

8. Schneidet ein durch die vier Grundpunkte eines erzeugenden Kegelschnittbüschels $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ gelegter Kegelschnitt die $C^{(3)}$ noch in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, so geht die Sehne $|\mathfrak{E}\mathfrak{F}|$ durch den Gegenpunkt $\mathfrak{O}$ des Punktquadrupels $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$; sind nun $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{F}_1$ die konjugierten Punkte zu $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ in dem alten Sinne, so ist der Schnittpunkt $(\mathfrak{E}\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_1\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{O}$; folglich müssen auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}_1\mathfrak{F}_1$ auf einem Kegelschnitt liegen, also:

Liegen irgend sechs Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ einer $C^{(3)}$ auf einem Kegelschnitt, und nimmt man zu irgend zweien derselben (etwa $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$) die konjugierten Punkte ($\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{F}_1$), so liegen die vier übrigen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ auch mit diesen beiden neuen Punkten $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1$ auf einem Kegelschnitt

Hieraus folgt, daß wenn $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$ die konjugierten Punkte zu $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ sind, auch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1$ auf einem Kegelschnitt liegen müssen, und endlich, wenn $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ die kon-

jugierten Punkte zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sind, daß auch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1$ auf einem Kegelschnitt liegen müssen; also gilt der Satz:

Liegen irgend sechs Punkte einer $C^{(3)}$ auf einem Kegelschnitt, so liegen auch ihre sechs konjugierten Punkte auf einem Kegelschnitt.

Dies läßt sich auch anders auffassen:

Zu dem Punktquadrupel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ ist der zugehörige Gegenpunkt der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{E}\mathfrak{F}|$ mit der $C^{(3)}$; zu dem Punktquadrupel $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]$ ist der zugehörige Gegenpunkt der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{E}_1\mathfrak{F}_1|$ mit der $C^{(3)}$; da aber $|\mathfrak{E}\mathfrak{F}|$ und $|\mathfrak{E}_1\mathfrak{F}_1|$ sich in einem Punkte $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$ schneiden, so folgt:

Ist zu einem beliebigen Punktquadrupel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ auf der $C^{(3)}$ der zugehörige Gegenpunkt $\mathfrak{O}$, und nimmt man die zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ konjugierten Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$, so hat dieses Punktquadrupel als zugehörigen Gegenpunkt denselben Punkt $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$.

Suchen wir zu zwei Paaren konjugierter Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, als Punktquadrupel aufgefaßt, den zugehörigen Gegenpunkt, so wird, weil das Linienpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ selbst in einem Punkte der $C^{(3)}$ sich begegnet

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{P},$$

die Tangente in $\mathfrak{P}$ den Gegenpunkt enthalten; wenn daher $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1|$ die dritten Schnittpunkte $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ haben, so muß auch $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2|$ diesen Gegenpunkt enthalten; nennen wir ihn $\mathfrak{P}'$, so liegen $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{P}'$ auf einer Geraden, und $\mathfrak{P}'$ ist der dritte Schnittpunkt der Tangente in $\mathfrak{P}$.

Nehmen wir in gleicher Weise die Punkte

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{D},\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1) = \mathfrak{Q},$$
$$(\mathfrak{E}\mathfrak{F},\ \mathfrak{E}_1\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{R};$$

haben

$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\rvert$	den	dritten	Schnittpunkt	$\mathfrak{C}_2$,
$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\rvert$	„	„	„	$\mathfrak{D}_2$,
$\lvert\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\rvert$	„	„	„	$\mathfrak{E}_2$,
$\lvert\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1\rvert$	„	„	„	$\mathfrak{F}_2$,
die Tangente in $\mathfrak{Q}$	„	„	„	$\mathfrak{Q}'$,
„ „ „ $\mathfrak{R}$	„	„	„	$\mathfrak{R}'$,

so liegen sowohl $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{P}'$ in einer Geraden,
als auch $\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2\mathfrak{Q}'$ „ „ „
und $\mathfrak{E}_2\mathfrak{F}_2\mathfrak{R}'$ „ „ „ ;

da aber $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ auf einer Geraden liegen, sobald $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ sich auf einem Kegelschnitt befinden (5.), da ferner auch $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}', \mathfrak{R}'$ auf einer Geraden liegen müssen (§ 8, 4) als die dritten Schnittpunkte der Tangenten in den Punkten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ einer Geraden, und da endlich durch $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}', \mathfrak{R}'$ die drei Geraden $|\mathfrak{P}'\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2|$, $|\mathfrak{Q}'\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2|$, $|\mathfrak{R}'\mathfrak{E}_2\mathfrak{F}_2|$ gehen, so müssen $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{F}_2$ auf einem Kegelschnitt liegen (5.); also gilt der Satz:

Liegen sechs Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ einer $C^{(3)}$ auf einem Kegelschnitt, so liegen nicht nur ihre sechs konjugierten Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1$ auf einem zweiten Kegelschnitt, sondern auch die dritten Schnittpunkte $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{F}_2$ der sechs Verbindungslinien $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|, |\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1|, |\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1|, |\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1|, |\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1|, |\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1|$ auf einem dritten Kegelschnitt.

Die konjugierten Punkte zu $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{F}_2$ sind nun bekanntlich diejenigen Punkte $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \ldots, \mathfrak{F}'$ der $C^{(3)}$, in welchen die Tangentenpaare für $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$ sich treffen, und da $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{F}_2$ auf einem Kegelschnitt liegen, so müssen nach dem vorigen Satze auch ihre konjugierten Punkte $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \ldots, \mathfrak{F}'$ auf einem Kegelschnitt liegen; also gilt der Satz:

Liegen sechs Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ einer $C^{(3)}$ auf einem Kegelschnitt, so treffen die sechs Tangenten der $C^{(3)}$ in diesen Punkten die Kurve in sechs neuen Punkten $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \mathfrak{D}', \mathfrak{E}', \mathfrak{F}'$, welche ebenfalls auf einem Kegelschnitt liegen.

§ 10. Konstruktion der $C^{(3)}$ durch neun willkürlich und unabhängig voneinander gegebene Punkte.

1. Die Erzeugung einer $C^{(3)}$ durch ein Kegelschnittbüschel und ein mit demselben projektives Strahlbüschel führt zur Konstruktion der Kurve durch eine zu ihrer Be-

stimmung notwendige Anzahl von Punkten; da die Kurve durch die Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ und den Mittelpunkt $\mathfrak{O}$ des erzeugenden Strahlbüschels selbst hindurchgeht, und da drei Paare entsprechender Elemente der beiden Gebilde die projektive Beziehung bestimmen, so erhält man dadurch $4 + 1 + 3.2 = 11$ Punkte der Kurve, die aber nicht voneinander unabhängig sind; vielmehr ist schon der Gegenpunkt $\mathfrak{O}$ durch die vier Grundpunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ bestimmt, und auf drei durch $\mathfrak{O}$ gelegten Strahlen des Strahlbüschels liegen je zwei Punkte mit $\mathfrak{O}$ auf einer Geraden. Wir können daher nur die vier Grundpunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ als unabhängig voneinander gegeben annehmen und von den Durchschnittspunkten eines Kegelschnitts des Büschels mit dem entsprechenden Strahl des erzeugenden Strahlbüschels immer nur einen; nehmen wir nur drei solcher Punkte, so ist für jede beliebige Annahme von $\mathfrak{O}$ die projektive Beziehung der beiden Gebilde gerade erst bestimmt.

Wir wollen daher vier Punkte

$$\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$$

annehmen und den Punkt $\mathfrak{O}$ so zu bestimmen suchen, daß für ihn den vier Kegelschnitten:

$$[\mathfrak{abcde}], \quad [\mathfrak{abcdf}], \quad [\mathfrak{abcdg}], \quad [\mathfrak{abcdh}],$$

die wir zur Abkürzung so bezeichnen wollen

$$[\mathfrak{abcd}](\mathfrak{efgh}),$$

vier Strahlen

$$|\mathfrak{Oe}|, \quad |\mathfrak{Of}|, \quad |\mathfrak{Og}|, \quad |\mathfrak{Oh}|$$

projektiv entsprechen, die wir, ebenfalls zur Abkürzung, so bezeichnen wollen

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{efgh}).$$

Durch die Projektivität

$$[\mathfrak{abcd}](\mathfrak{efgh}) \barwedge \mathfrak{O}(\mathfrak{efgh})$$

ist der Punkt $\mathfrak{O}$ noch nicht bestimmt, sondern auf einen gewissen Ort beschränkt, einen Kegelschnitt, welcher durch $\mathfrak{efgh}$ geht und ein bestimmtes Doppelverhältnis faßt. Der Ort eines Punktes $\mathfrak{O}$, welcher nach vier gegebenen Punkten $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ vier Strahlen sendet, die ein Doppelverhältnis von gegebenem Werte liefern, ist bekanntlich ein Kegelschnitt,

der so konstruiert werden kann: Man ziehe $|\mathfrak{e}\mathfrak{f}|$, $|\mathfrak{e}\mathfrak{g}|$, $|\mathfrak{e}\mathfrak{h}|$ und bestimme durch $\mathfrak{e}$ denjenigen vierten Strahl t, welcher mit den drei ersten Strahlen den gegebenen Wert des konstanten Doppelverhältnisses liefert, dann wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher durch $\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ geht und in $\mathfrak{e}$ die Gerade t berührt, wodurch er gerade bestimmt ist, der Forderung der Aufgabe genügen, also der Ort von $\mathfrak{D}$ sein.

Der Wert des Doppelverhältnisses ist aber hier gegeben durch die vier Kegelschnitte des Büschels

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}](\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h}),$$

welches man auf ein Strahlbüschel reduzieren kann (§ 4, 5), indem man entweder in einem der vier Grundpunkte die vier Tangenten an diesen Kegelschnitten zieht, oder auf eine gerade Punktreihe, indem man durch einen der Grundpunkte eine beliebige Transversale zieht, welche den Kegelschnitten in vier Punkten begegnet, die den Wert des Doppelverhältnisses liefern.

Aus dem Vorigen geht hervor, daß durch die acht Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ nicht nur e i n e $C^{(3)}$ gelegt werden kann, sondern unendlich viele; denn jeder Punkt $\mathfrak{D}$ des gefundenen Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ darf als Mittelpunkt eines erzeugenden Strahlbüschels gewählt werden, wodurch dann die ganze Beziehung der beiden erzeugenden projektiven Gebilde hergestellt ist, also die $C^{(3)}$ vollständig bestimmt ist.

2. Nehmen wir nun einen beliebigen Punkt $\mathfrak{D}$ des gefundenen Kegelschnitts und konstruieren die durch ihn vollständig bestimmte $C^{(3)}$, so wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ mit der $C^{(3)}$ außer den fünf Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{D}$ noch einen notwendigen sechsten Schnittpunkt $\mathfrak{o}$ gemein haben, sodaß die Projektivität erfüllt wird

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}](\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{o}) \barwedge \mathfrak{D}(\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{o});$$

nehmen wir aber einen beliebigen andern Punkt $\mathfrak{D}_1$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, so erhalten wir dadurch eine andere $C_1^{(3)}$, welche durch das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ und das Strahlbüschel $[\mathfrak{D}_1]$ erzeugt wird. Aus der Natur des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ geht aber die Projektivität hervor

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{efgho}) \barwedge \mathfrak{O}_1(\mathfrak{efgho}),$$

folglich gilt auch die Projektivität:

$$[\mathfrak{abcd}](\mathfrak{efgho}) \barwedge \mathfrak{O}_1(\mathfrak{efgho}),$$

woraus folgt, daß auch die Kurve $C_1^{(3)}$ durch den Punkt $\mathfrak{o}$ hindurchgehen muß. Dies gilt für sämtliche Punkte $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_1, \ldots$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, folglich ergiebt sich der fundamentale Satz:

Sämtliche Kurven dritter Ordnung $C^{(3)}$, welche durch acht willkürlich und unabhängig voneinander gegebene Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ gelegt werden können, müssen noch durch einen und denselben notwendigen neunten Punkt $\mathfrak{o}$ hindurchgehen.

Sie bilden ein Kurvenbüschel dritter Ordnung von gleicher Mächtigkeit mit den Punkten eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, also von einfach-unendlicher Mannigfaltigkeit (∞^1), wie das ebene Strahlbüschel oder die gerade Punktreihe.

Wir können den vorigen Satz auch so aussprechen:

Wenn zwei Kurven dritter Ordnung $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ sich in neun Punkten begegnen, so muß jede Kurve dritter Ordnung, welche durch acht dieser Punkte hindurchgeht, auch durch den neunten gehen.

Solche neun Punkte bilden eine Gruppe von neun associierten Punkten, indem jeder derselben als der neunte notwendige für die übrigen acht aufgefaßt werden kann.

Die vorige Betrachtung gestattet auch die Konstruktion des notwendigen neunten Punktes $\mathfrak{o}$, sobald die acht Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ gegeben sind.

Man lege die vier Kegelschnitte:

$$[\mathfrak{abcd}](\mathfrak{efgh})$$

und konstruiere in der oben angegebenen Weise denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher durch $\mathfrak{efgh}$ geht und das Doppelverhältnis der vier Kegelschnitte faßt; nun vertausche man $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$, lege also die vier Kegelschnitte:

$$[\mathfrak{abch}](\mathfrak{efgd})$$

und konstruiere denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welcher durch $\mathfrak{efgd}$ geht und das Doppelverhältnis dieser vier Kegel-

schnitte faßt; die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welche die drei Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ gemein haben, müssen noch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{o}$ haben, welcher der gesuchte ist; er kann hiernach bekanntlich auf lineare Weise konstruiert werden.

3. Der vorige allgemeine Satz liefert eine Menge von speziellen Fällen, von denen wir nur zwei hervorheben wollen:

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ irgend sechs Punkte eines Kegelschnitts, so können die drei Geraden

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|, \quad |\mathfrak{e}\mathfrak{f}|$$

als eine ausgeartete Kurve dritter Ordnung aufgefaßt werden; ebenso die drei Geraden

$$|\mathfrak{d}\mathfrak{e}|, \quad |\mathfrak{f}\mathfrak{a}|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{c}|.$$

Die neun Durchschnittspunkte dieser beiden Kurven dritter Ordnung bilden also eine Gruppe von neun associierten Punkten; sie sind

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e},\ \mathfrak{f} \quad \text{und}$$
$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{d}\mathfrak{e}) = \mathfrak{p}, \quad (\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{f}\mathfrak{a}) = \mathfrak{q}, \quad (\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{e}\mathfrak{f}) = \mathfrak{r}.$$

Da jede Kurve dritter Ordnung, welche durch acht derselben geht, auch durch den neunten gehen muß, so muß die ausgeartete Kurve, welche aus dem Kegelschnitt $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}]$ und der Geraden $|\mathfrak{p}\mathfrak{q}|$ besteht, auch durch $\mathfrak{r}$ gehen; da aber $\mathfrak{r}$ nicht auf dem Kegelschnitt liegen kann, weil er auf der Sehne $|\mathfrak{e}\mathfrak{f}|$ liegt, so müssen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ auf einer Geraden liegen, was den Pascalschen Satz giebt.

Wenn zweitens drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, $\mathfrak{K}_2^{(2)}$, $\mathfrak{K}_3^{(2)}$ zwei gemeinschaftliche Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ haben, so haben je zwei derselben noch zwei weitere Punkte gemein, nämlich

$\mathfrak{K}_2^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_3^{(2)}$ haben gemein die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$;
$\mathfrak{K}_3^{(2)}$ " $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ " " " " $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$;
$\mathfrak{K}_1^{(2)}$ " $\mathfrak{K}_2^{(2)}$ " " " " $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3$;

demgemäß liegen

auf $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ die sechs Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3$;
„ $\mathfrak{K}_2^{(2)}$ „ „ „ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$;
„ $\mathfrak{K}_3^{(2)}$ „ „ „ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$.

Fassen wir nun den Kegelschnitt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3] \text{ und die Gerade } |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$$

als eine ausgeartete Kurve dritter Ordnung auf, ebenso den Kegelschnitt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1] \text{ und die Gerade } |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2|$$

als eine zweite ausgeartete Kurve dritter Ordnung, so bilden die neun Durchschnittspunkte derselben eine Gruppe von neun associierten Punkten; diese sind aber

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{o};$$

da nun von diesen die sechs Punkte

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$$

auf einem Kegelschnitt liegen, so müssen die drei übrigen $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{o}$ auf einer Geraden liegen, d. h. $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|, |\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2|, |\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3|$ sich in einem Punkte $\mathfrak{o}$ schneiden, was den bekannten Satz giebt:

Wenn drei Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Sekante haben, so müssen die drei übrigen gemeinschaftlichen Sekanten je zweier derselben sich in einem Punkte schneiden.

4. Wenn wir zu den acht beliebig auf der $C^{(3)}$ angenommenen Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ die konjugierten Punkte nehmen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1$ (in dem früheren Sinne § 2, 7), so können wir auch zu den letzteren den notwendigen neunten Punkt konstruieren; schneiden nun die vier Kegelschnitte

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}](\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

die $C^{(3)}$ in den sechsten Punkten $\mathfrak{e}', \mathfrak{f}', \mathfrak{g}', \mathfrak{h}'$, so müssen nach § 9, 8 auch die konjugierten Punkte derselben $\mathfrak{e}_1', \mathfrak{f}_1', \mathfrak{g}_1', \mathfrak{h}_1'$ die sechsten Schnittpunkte der vier Kegelschnitte

$$[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1](\mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$$

sein. Da die vier Sehnen

$$|\mathfrak{e}\mathfrak{e}'|,\quad |\mathfrak{f}\mathfrak{f}'|,\quad |\mathfrak{g}\mathfrak{g}'|,\quad |\mathfrak{h}\mathfrak{h}'|$$

sich in einem Punkte $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$ schneiden, so müssen, wie aus dem Früheren hervorgeht, auch die vier Sehnen

$$|\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1'|,\quad |\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1'|,\quad |\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_1'|,\quad |\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_1'|$$

sich in demselben Punkte $\mathfrak{O}$ der $C^{(3)}$ schneiden. Legen wir nun durch $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{O}$ einen Kegelschnitt, so ist sein sechster Schnittpunkt mit der $C^{(3)}$ der notwendige neunte Punkt $\mathfrak{o}$ für die Gruppe $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h}$, und legen wir durch $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{O}$ einen Kegelschnitt, so ist sein sechster Schnittpunkt der notwendige neunte Punkt für die Gruppe $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1$. Nun wissen wir aber (§ 9, 8), daß wenn die Punkte $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{O}, \mathfrak{o}$ einer $C^{(3)}$ auf einem Kegelschnitt liegen, auch die sechs Punkte $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{O}, \mathfrak{o}$ auf einem Kegelschnitt liegen müssen; also schließen wir:

Wenn man zu irgend acht Punkten einer $C^{(3)}$ den notwendigen neunten der Gruppe von neun associierten Punkten aufsucht, so ist derselbe identisch mit dem notwendigen neunten Punkt der aus den acht konjugierten Punkten der ersteren gebildeten Gruppe.

5. Da durch acht unabhängig von einander gegebene Punkte unendlich viele Kurven $C^{(3)}$ gehen, die ein Kurvenbüschel von einfach-unendlicher Mannigfaltigkeit bilden, so wird durch einen willkürlich hinzugefügten neunten Punkt nur eine $C^{(3)}$ gehen und durch diese neun Punkte bestimmt sein. In der That werden wir sie in folgender Weise konstruieren können:

Wählen wir der Deutlichkeit wegen eine etwas abgeänderte Bezeichnung und nennen

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

neun willkürlich und unabhängig voneinander gegebene Punkte (d. h. solche, von denen keine drei auf einer Geraden, keine sechs auf einem Kegelschnitt liegen und die nicht alle neun eine Gruppe von associierten Punkten bilden); dann legen wir die vier Kegelschnitte

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}](1, 2, 3, 4);$$

und bestimmen denjenigen durch 1, 2, 3, 4 gehenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher das Doppelverhältnis dieser vier Kegelschnitte faßt. Zweitens legen wir die vier Kegelschnitte $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ (1235) und bestimmen denjenigen durch 1235 gehenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welcher das Doppelverhältnis dieser vier Kegelschnitte faßt. Dann werden die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welche bereits die drei Punkte 1, 2, 3 gemein haben, nur noch einen einzigen reellen bestimmten Punkt $\mathfrak{O}$ gemein haben; derselbe ist der gesuchte Mittelpunkt $\mathfrak{O}$ des erzeugenden Strahlbüschels, welches mit dem erzeugenden Kegelschnittbüschel in der projektiven Beziehung steht:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}](12345) \barwedge \mathfrak{O}(12345);$$

diese beiden projektiven Gebilde erzeugen dann diejenige $C^{(3)}$, welche durch die neun gegebenen Punkte geht und durch dieselben bestimmt wird. Die Konstruktion des Punktes $\mathfrak{O}$ ist linear auszuführen; er ist der Gegenpunkt zu dem Punktquadrupel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$.*

6. Um eine Kurve $C_d^{(3)}$ mit einem Doppelpunkt zu erzeugen, können wir an Stelle des Kegelschnittbüschels $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ eine Strahleninvolution $\|\mathfrak{O}\|$ setzen und dieselbe in projektive Beziehung bringen mit einem einfachen Strahlbüschel $|\mathfrak{O}_1|$; jedem Strahlenpaar der Strahleninvolution $\|\mathfrak{O}\|$ entspricht dann ein bestimmter Strahl des Strahlbüschels $|\mathfrak{O}_1|$, und der gesamte Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Elemente dieser beiden erzeugenden Gebilde ist die $C_d^{(3)}$. Jeder Strahl durch $\mathfrak{O}_1$ enthält daher noch zwei Punkte des Ortes, welcher offenbar selbst durch $\mathfrak{O}_1$ geht; jeder Strahl durch $\mathfrak{O}$ enthält aber nur noch einen Punkt des Ortes, für welchen offenbar $\mathfrak{O}$ ein Doppelpunkt ist. Dem Strahle $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}|$ als dem Strahlbüschel $|\mathfrak{O}_1|$ angehörig entspricht in der Strahleninvolution $\|\mathfrak{O}\|$ ein Strahlenpaar, welches die Tangenten der $C_d^{(3)}$ in dem Doppelpunkte sind;

* Diese Konstruktion ist gegeben von Chasles in den Comptes rendus tome XXXVI p. 951 et suiv. Vergl. E. de Jonquières: Essai sur la génération des courbes géométriques et en particulier sur celle de la courbe de quatrième ordre. Paris 1858.



dem Strahle $|\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1|$ als einem Teile eines Strahlenpaares der Involution $\|\mathfrak{D}\|$ entspricht in dem Strahlbüschel $|\mathfrak{D}_1|$ die Tangente der $C_d^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{D}_1$. Aus dieser Erzeugungsweise läßt sich die ganze Theorie der $C_d^{(3)}$ ableiten.

Wir wollen nur noch die Konstruktion der $C_d^{(3)}$ geben, sobald von ihr der Doppelpunkt und die zu ihrer Bestimmung notwendige und hinreichende Anzahl von weiteren Punkten gegeben ist; dies sind, wie wir sofort erkennen, noch sechs Punkte, indem der Doppelpunkt drei in sich einschließt. Denn geben wir den Doppelpunkt $\mathfrak{D}$ und noch sechs einfache Punkte
$$\mathfrak{D}_1,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e},$$
so können wir das Strahlbüschel
$$\mathfrak{D}_1\,|\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\,|$$
ziehen und nach $\mathfrak{D}$ eine Strahleninvolution verlegen, die projektiv ist mit dem Strahlbüschel $|\mathfrak{D}_1|$, sodaß von fünf Strahlenpaaren derselben Teile durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ gehen, und solchen Strahlenpaaren die Strahlen des vorigen Strahlbüschels $\mathfrak{D}_1$ entsprechend sind. Die Bestimmung dieser Strahleninvolution $\|\mathfrak{D}\|$ führt sehr einfach wieder auf das vorige Problem der Projektivität zurück. Wir ziehen nämlich die fünf Strahlen
$$\mathfrak{D}\,|\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\,|$$
legen durch $\mathfrak{D}$ einen beliebigen Hilfskegelschnitt $K^{(2)}$, welchem diese fünf Strahlen bez. in
$$\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}',\ \mathfrak{d}',\ \mathfrak{e}'$$
begegnen, und suchen sodann den eindeutig bestimmten Punkt $\mathfrak{P}$ auf, für welchen die Projektivität
$$\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{e}'\,|\ \overline{\wedge}\ \mathfrak{D}_1\,|\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{e}\,|$$
erfüllt wird. Die Konstruktion des Punktes $\mathfrak{P}$ ist oben angegeben. Ist $\mathfrak{P}$ gefunden, so treffen die Strahlen $\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{e}'\,|$ den Hilfskegelschnitt $K^{(2)}$ in fünf neuen Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{e}''$, und es ist ersichtlich, daß die Strahlenpaare, welche $\mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{e}'\mathfrak{e}''$ sendet, eine Strahleninvolution bilden; diese ist projektiv mit dem einfachen Strahlbüschel $|\mathfrak{P}|$, folglich auch mit dem Strahlbüschel $|\mathfrak{D}_1|$, und nun haben wir die beiden die $C_d^{(3)}$ erzeugenden Gebilde, das Strahlbüschel $|\mathfrak{D}_1|$ und die Strahlen-

involution $|\mathfrak{O}|$ in projektiver Beziehung, und das Erzeugnis genügt offenbar der Forderung der Aufgabe, durch die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$, den Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels $\mathfrak{O}_1$ und den Doppelpunkt $\mathfrak{O}$ hindurchzugehen.

§ 11. Eine andere Lösung der vorhergehenden Aufgabe.

1. Hat man ein Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ und ein Strahlbüschel $[\mathfrak{O}]$ in projektive Beziehung gesetzt zur Erzeugung einer $C^{(3)}$, und entspricht einem beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ des Büschels der Strahl x des Strahlbüschels $[\mathfrak{O}]$, so gehören die beiden Schnittpunkte

$$\mathfrak{x}_1 \text{ und } \mathfrak{x}_2$$

von $\mathfrak{X}^{(2)}$ und x dem Erzeugnis $C^{(3)}$ an.

Zieht man durch einen der vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels, etwa durch $\mathfrak{D}$, eine beliebige feste Gerade l, welche den Kegelschnitten des Büschels in der geraden Punktreihe

$$(\mathfrak{y})$$

begegnet, so wird diese vom Punkte $\mathfrak{y}$ auf l beschriebene Punktreihe mit dem Kegelschnittbüschel (§ 4, 5), also auch mit dem Strahlbüschel $\mathfrak{O}\,|\,x\,|$ projektiv sein.

Wir legen nun den besonderen Kegelschnitt $\mathfrak{X}_0^{(2)}$, welcher durch die fünf Punkte

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{O}$$

geht und der Geraden l in $\mathfrak{y}_0$ begegnet, den veränderlichen Strahl x aber in $\mathfrak{x}'$ treffe, dann werden die drei Kegelschnitte

$$\mathfrak{X}^{(2)}, \quad \mathfrak{X}_0^{(2)} \quad \text{und} \quad [lx],$$

von denen der letzte ein Linienpaar ist, den gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{D}$ haben, also je zwei derselben noch drei übrige gemeinschaftliche Punkte, nämlich

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{X}^{(2)} & \text{und } \mathfrak{X}_0^{(2)}: & \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{X}^{(2)} & \quad ,, \quad [lx]: & \mathfrak{y}\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2, \\ \mathfrak{X}_0^{(2)} & \quad ,, \quad [lx]: & \mathfrak{y}_0\mathfrak{O}\,\mathfrak{x}'. \end{array}$$

Nach einem bekannten Satze (Th. d. K. S. 242): „Wenn drei Kegelschnitte einen Punkt gemein haben, so haben je zwei derselben noch drei andere Punkte gemein, welche ein Dreieck bilden; die neun Seiten der dadurch erhaltenen drei Dreiecke berühren einen und denselben Kegelschnitt“, werden daher die Geraden

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1|, \quad |\mathfrak{y}\mathfrak{x}_2|, \quad x, \quad |\mathfrak{y}_0\mathfrak{D}|, \quad |\mathfrak{y}_0\mathfrak{x}'|$$

einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ berühren.

Lassen wir nun die durch die projektive Beziehung der beiden erzeugenden Büschel gegebene Bewegung in die Figur eintreten, so verändert sich auch der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, er wird aber beständig die vier festen Tangenten behalten

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{y}_0|,$$

also eine Kegelschnittschar beschreiben; auf einer der vier gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kegelschnittschar befindet sich ein fester Punkt $\mathfrak{D}$, aus welchem an die Kegelschnitte der Schar die jedesmalige zweite veränderliche Tangente x gelegt wird. Diese beschreibt daher ein Strahlbüschel $\mathfrak{D}|x|$, welches offenbar projektiv ist mit der Kegelschnittschar und auch, wie wir gesehen haben, mit der Punktreihe, welche $\mathfrak{y}$ auf l beschreibt; also ist auch die Kegelschnittschar projektiv mit der Punktreihe $l(\mathfrak{y})$. Das Tangentenpaar $|\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1|$ und $|\mathfrak{y}\mathfrak{x}_2|$ aus jedem Punkte $\mathfrak{y}$ an den entsprechenden Kegelschnitt der Schar wird daher einen Ort umhüllen, der das dual gegenüberstehende Erzeugnis einer $C^{(3)}$ ist, (erzeugt durch ein Kegelschnittbüschel und ein mit demselben projektives Strahlbüschel) also eine Kurve dritter Klasse

$$\mathfrak{K}^{(3)},$$

welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnittschar und den Träger der erzeugenden geraden Punktreihe selbst zu Tangenten hat. Hieraus ergiebt sich zugleich eine andere Erzeugungsweise unserer $C^{(3)}$, welche sich so aussprechen läßt:

Hat man eine Kegelschnittschar (mit vier gemeinschaftlichen Tangenten) und eine mit derselben projektive gerade Punktreihe $(\mathfrak{y})$ auf dem Träger l,

ferner einen auf einer der vier gemeinschaftlichen Tangenten der Schar gelegenen festen Punkt $\mathfrak{O}$, und legt man an jeden Kegelschnitt der Schar einerseits aus $\mathfrak{O}$ die noch übrige zweite veränderliche Tangente x, andererseits aus dem Punkte $\mathfrak{y}$, welcher dem Kegelschnitt der Schar entsprechend ist in der Punktreihe $l(\mathfrak{y})$, das Tangentenpaar, welches dem Strahle x in $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ begegnet, so ist der gesamte Ort dieser Schnittpunkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ eine Kurve dritter Ordnung $C^{(3)}$, die selbst durch $\mathfrak{O}$ geht, sowie durch die drei Ecken des Dreiseits, das von den drei übrigen gemeinschaftlichen Tangenten der Schar, die nicht $\mathfrak{O}$ enthalten, gebildet wird. Nennen wir dieses Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, so laufen alle Kegelschnitte, welche die je sechs Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ enthalten, durch einen vierten festen Punkt $\mathfrak{D}$, der ebenfalls auf $C^{(3)}$ liegt und gleichzeitig auf l. Das Tangentenpaar $|\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1|$, $|\mathfrak{y}\mathfrak{x}_2|$ umhüllt eine Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$, deren Zusammenhang mit der $C^{(3)}$ im Obigen enthalten ist.

Da die Gerade l ganz willkürlich durch den Grundpunkt $\mathfrak{D}$ des ursprünglichen erzeugenden Kegelschnittbüschels gezogen war, so wird auch die zur Bestimmung der Kegelschnittschar dienende vierte gemeinschaftliche Tangente

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{y}_0| = g$$

eine frei zu wählende sein, wenn wir die neue Erzeugung der $C^{(3)}$ beabsichtigen.

2. Wir können nun aus dieser eine zweite Konstruktion der $C^{(3)}$ durch neun willkürlich und unabhängig voneinander gegebene Punkte ableiten, die sich so gestalten wird:

Seien die neun gegebenen Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{O},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

so ziehe man durch $\mathfrak{O}$ eine beliebige Gerade g und bestimme fünf Kegelschnitte, welche die vier gemeinsamen Tangenten

$$|\mathfrak{AB}|, \quad |\mathfrak{AC}|, \quad |\mathfrak{BC}|, \quad g$$

haben und außerdem zu Tangenten je einen der fünf Strahlen

$$|\mathfrak{D}1|, \quad |\mathfrak{D}2|, \quad |\mathfrak{D}3|, \quad |\mathfrak{D}4|, \quad |\mathfrak{D}5|;$$

sodann lege man an jeden dieser fünf Kegelschnitte, die einer Schar angehören, aus den fünf Punkten 1, 2, 3, 4, 5, die jedesmal noch übrige zweite Tangente

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad t_4, \quad t_5$$

und suche eine Gerade l, welche diese fünf Geraden t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 in solchen fünf Punkten

$$\mathfrak{y}_1, \quad \mathfrak{y}_2, \quad \mathfrak{y}_3, \quad \mathfrak{y}_4, \quad \mathfrak{y}_5$$

schneidet, daß die Projektivität erfüllt wird

$$l\,(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5) \barwedge \mathfrak{D}\,(12345).$$

Dadurch ist die Gerade l vollständig und eindeutig bestimmt nach dem Problem der Projektivität, eine Aufgabe, die dual gegenübersteht der oben (§ 10, 5) gelösten, und deren Ausführung daher keiner Wiederholung bedarf.

Ist die Gerade l gefunden, so kann man in doppelter Weise verfahren:

1. Jedem Punkt $\mathfrak{y}$ der Punktreihe auf l entspricht jetzt ein bestimmter Strahl x des Strahlbüschels $\mathfrak{D}\,|x|$ und ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ aus der Schar mit den vier festen Tangenten $|\mathfrak{AB}|$, $|\mathfrak{AC}|$, $|\mathfrak{BC}|$, g und der jedesmaligen fünften Tangente x. Legt man aus $\mathfrak{y}$ an diesen Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ das Tangentenpaar, so schneidet es den Strahl x in einem Punktepaar $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2$, dessen gesamter Ort die Kurve $C^{(3)}$ erfüllt.

2. Man lege den besonderen Kegelschnitt $\mathfrak{X}_0^{(2)}$, welcher durch die vier Punkte

$$\mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}, \ \mathfrak{C}, \ \mathfrak{D}$$

und den Schnittpunkt

$$(l, g) = \mathfrak{y}_0$$

bestimmt wird; dieser schneidet l zum andern Mal in dem Punkte $\mathfrak{D}$, dem vierten Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels $[\mathfrak{ABCD}]$, welches mit dem Strahlbüschel $\mathfrak{D}\,|x|$ projektiv ist, indem immer dem Kegelschnitt $[\mathfrak{ABCD}\mathfrak{y}]$ der



Strahl x entsprechend ist, welcher dem Punkte $\mathfrak{y}$ der geraden Punktreihe auf l entspricht. Diese beiden projektiven Gebilde des Kegelschnittbüschels $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ und des Strahlbüschels $[\mathfrak{O}]$ erzeugen dann in der früheren Weise die Kurve $C^{(3)}$, welche durch die gegebenen neun Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{O},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

hindurchgeht. Durch die Konstruktion des Punktes $\mathfrak{D}$, welche oben gegeben ist, wird zugleich die Aufgabe gelöst:

Zu den gegebenen neun Punkten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{O},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

einen solchen Punkt $\mathfrak{D}$ zu finden, daß die Projektivität erfüllt wird

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}](12345) \barwedge \mathfrak{O}(12345).$$

Diese zweite Lösung der Aufgabe nimmt also nicht, wie die erste Lösung, die vier Grundpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ des erzeugenden Kegelschnittbüschels als gegeben an und sucht den zugehörigen Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels (Gegenpunkt), sondern nimmt umgekehrt den Mittelpunkt des erzeugenden Strahlbüschels $\mathfrak{O}$ und drei von den Grundpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ des erzeugenden Kegelschnittbüschels als gegeben an und sucht den zugehörigen vierten Grundpunkt desselben. Die aus dieser Auffassung entspringende Lösung ist verschieden von derjenigen, welche de Jonquières in den Comptes rendus tome XLV, 7. September 1857 gegeben hat. Sie findet sich von Chasles in Liouville's Journal tome XIX pag. 366 ohne Beweis mitgeteilt.

3. Nehmen wir zur Bestimmung einer $C^{(3)}$ nur acht Punkte an

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{O},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

so ist dieselbe nicht vollständig bestimmt, sondern es giebt unendlich viele $C^{(3)}$, welche durch diese acht Punkte gehen; denn die vorige Konstruktion zur Bestimmung der Geraden l führt auf die Bedingung

$$l\,(t_1 t_2 t_3 t_4) \barwedge \mathfrak{O}(1234),$$

welcher nicht blos eine Gerade l genügt, sondern unendlich viele, die einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ umhüllen, der die vier

Geraden t_1, t_2, t_3, t_4 berührt und das Doppelverhältnis $\mathfrak{D}(1234)$ faßt, d. h. jede Tangente desselben wird von $t_1 t_2 t_3 t_4$ in vier Punkten geschnitten, deren Doppelverhältnis gleich ist $\mathfrak{D}(1234)$. Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist dadurch vollständig und eindeutig bestimmt und kann in bekannter Weise konstruiert werden (s. o.).

Da nun für l jede beliebige Tangente dieses Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ gewählt werden kann, so giebt es unendlich viele $C^{(3)}$, die ein Büschel von einfach-unendlicher Mannigfaltigkeit bilden, wie wir schon früher (§ 10, 2) gesehen haben.

Mit der Kurve $C^{(3)}$ hängt, wie wir gesehen haben, eine bestimmte Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ (1.) zusammen, die von allen Tangentenpaaren $|\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1|$, $|\mathfrak{y}\mathfrak{x}_2|$ umhüllt wird. Diese hat nun mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, wenn wir eine bestimmte Tangente l als Träger der erzeugenden Punktreihe wählen, bereits die fünf Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 und l gemein, folglich notwendig noch eine reelle sechste Tangente, die wir t_0 nennen wollen, und es muß daher auch die Projektivität gelten

$$[\,|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{C}|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|,\ g]\,(t_1 t_2 t_3 t_4 t_0) \barwedge l\,(t_1 t_2 t_3 t_4 t_0).$$

Da aber für jede beliebige andere Tangente l' des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ wegen der projektiven Natur desselben

$$l\,(t_1 t_2 t_3 t_4 t_0) \barwedge l'\,(t_1 t_2 t_3 t_4 t_0)$$

sein muß, so ist auch

$$[\,|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{C}|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|,\ g]\,(t_1 t_2 t_3 t_4 t_0) \barwedge l'\,(t_1 t_2 t_3 t_4 t_0),$$

d. h. diejenige neue Kurve $\mathfrak{K}^{(3)\prime}$, welche vermittelst der erzeugenden Punktreihe auf l' konstruiert wird, hat ebenfalls die Gerade t_0 zur Tangente.

Hieraus folgt, daß sämtliche Kurven dritter Klasse, welche die acht gemeinschaftlichen Tangenten haben

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{C}|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|,\ g,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,$$

noch eine und dieselbe neunte notwendige Tangente haben und eine Schar von Kurven dritter Klasse bilden, ein dem früheren dual gegenüberstehendes Resultat.



Zu den vier Strahlen $\mathfrak{D}(1234)$ giebt es nun auch nur einen einzigen bestimmten Strahl x_0, welcher der Bedingung genügt

$$l(t_1 t_2 t_3 t_4 t_0) \,\dot{\overline{\wedge}}\, \{|\mathfrak{D}1|, |\mathfrak{D}2|, |\mathfrak{D}3|, |\mathfrak{D}4|, x_0\},$$

und ist derselbe ermittelt (in bekannter eindeutiger Weise), so wird der Schnittpunkt

$$(t_0 x_0) = \mathfrak{o}$$

der neunte notwendige Punkt sein des Kurvenbüschels dritter Ordnung, welches durch die acht Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, 1, 2, 3, 4$ bestimmt wird; denn der besondere Kegelschnitt, welcher die fünf Geraden

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad g, \quad x_0$$

berührt, muß auch t_0 berühren, also müssen die beiden Dreiecke

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \quad \text{und} \quad g x_0 t_0$$

ihre sechs Ecken auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{X}_0^{(2)}$ haben; der durch die Punkte

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}, \quad (x_0 t_0), \quad (g t_0)$$

gehende Kegelschnitt schneidet aber t_0, wie wir oben gesehen haben, zum andern Mal in einem Punkte, welcher auf $C^{(3)}$ liegt, also liegt der Punkt

$$(x_0 t_0) = \mathfrak{o}$$

auf sämtlichen Kurven $C^{(3)}$ des Kurvenbüschels dritter Ordnung und ist der notwendige neunte Grundpunkt dieses Büschels, weil t_0 allen Kurven dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ der vorigen Schar als neunte Tangente gemeinschaftlich ist.

4. Wir sind also auch von dieser zweiten Erzeugung der $C^{(3)}$ aus zu dem schon in § 10, 2 gefundenen Resultate gelangt; hier tritt aber noch eine andere fundamentale Eigenschaft eines solchen Kurvenbüschels dritter Ordnung hinzu, die wir sogleich anschließen wollen:

Ziehen wir nämlich durch $\mathfrak{D}$ einen beliebigen, aber festen Strahl x_1, so wird jede Kurve $C^{(3)}$ des Kurvenbüschels demselben außer in $\mathfrak{D}$ noch in einem Punktepaar $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_1'$ begegnen, welches so bestimmt werden kann: Man nehme eine beliebige Tangente l des oben ermittelten Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, der $t_1 t_2 t_3 t_4$ berührt und der Projektivität

$$l(t_1 t_2 t_3 t_4) \barwedge \mathfrak{D}(1234)$$

genügt. Dem Strahle x_1 durch $\mathfrak{D}$ gehört dann auf l ein bestimmter projektiv entsprechender Punkt $\mathfrak{y}_1$ zu, sodaß die Projektivität erfüllt wird

$$\{(lt_1)\ (lt_2)\ (lt_3)\ (lt_4)\ \mathfrak{y}_1\} \barwedge \{|\mathfrak{D}1|\ \ |\mathfrak{D}2|\ \ |\mathfrak{D}3|\ \ |\mathfrak{D}4|\ \ x_1\};$$

durch die fünf Tangenten

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|,\quad g,\quad x_1$$

ist ein bestimmter Kegelschnitt $K^{(2)}$ fixiert, und das Tangentenpaar aus $\mathfrak{y}_1$ an denselben trifft, den Strahl x_1 in dem gesuchten Punktepaar $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_1'$. Verändern wir nun l längs des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, während x_1, also auch der Kegelschnitt $K^{(2)}$ unverändert bleibt, so wird nur der Punkt $\mathfrak{y}_1$ sich verändern und zwar, wie leicht zu sehen ist, auf einer Geraden l_1, welche Tangente an $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist; denn werden vier feste Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ von einer variablen Tangente l in vier Punkten getroffen und auf letzterer allemal ein solcher Punkt $\mathfrak{y}_1$ bestimmt, daß die Punktreihe

$$\{(lt_1)\ (lt_2)\ (lt_3)\ (lt_4)\ \mathfrak{y}_1\}$$

immer mit sich projektiv bleibt, d. h. für jede andere Tangente l' auch

$$l(t_1 t_2 t_3 t_4 \mathfrak{y}_1) \barwedge l'(t_1 t_2 t_3 t_4 \mathfrak{y}_1')$$

wird, so muß $|\mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_1'| = l_1$ eine feste Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ sein, wie aus der bekannten Grundeigenschaft des Kegelschnitts, welcher durch zwei projektive Punktreihen erzeugt wird

$$l(t_1 t_2 t_3 t_4 l_1) \barwedge l'(t_1 t_2 t_3 t_4 l_1)$$

unmittelbar sich ergiebt.

Hieraus folgt nun, daß man von den Punkten $\mathfrak{y}_1$ einer Geraden l_1 die Tangentenpaare an einen festen Kegelschnitt $K^{(2)}$ zu legen hat und die Schnittpunktpaare derselben mit einer festen Tangente x_1 des Kegelschnitts $K^{(2)}$ aufzusuchen sind, um das gesuchte Punktepaar $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_1'$ zu erhalten. Nach einem bekannten Satze (Th. d. K. S. 152) bilden aber diese Schnittpunktpaare eine Punktinvolution, und wir erhalten

eine charakteristische Eigenschaft für das Kurvenbüschel dritter Ordnung:

Zieht man durch einen der neun Grundpunkte eines Kurvenbüschels dritter Ordnung eine feste Gerade, welche jeder Kurve des Büschels noch in zwei weiteren Punkten begegnet, so bilden diese Paare von Schnittpunkten auf der Geraden eine Involution von Punktepaaren.

(Es giebt also insbesondere zwei Kurven des Büschels, welche eine durch einen Grundpunkt gehende Gerade berühren, ferner lassen sich hiernach solche Kurvenbüschel wieder in projektive Beziehung setzen zu anderen Gebilden von gleicher Mächtigkeit u. s. w.)

§ 12. Andere Erzeugungsweisen und daraus hervorgehende Konstruktionen der $C^{(3)}$.

1. Die Erzeugung der $C^{(3)}$ durch zwei Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage (§ 3) führt uns zu einer Verallgemeinerung, welche wieder andere Erzeugungsweisen und Konstruktionen der $C^{(3)}$ liefert.

Eine Strahleninvolution ist nämlich nur ein spezieller Fall eines Kegelschnittbüschels, bei welchem sämtliche Kegelschnitte in Linienpaare ausgeartet sind.

Ein Kegelschnittbüschel wird bestimmt durch zwei Kegelschnitte, deren vier gemeinschaftliche Punkte die Grundpunkte des Büschels sind. Nehmen wir nun zwei Linienpaare aa_1, bb_1 an, die denselben Doppelpunkt haben

$$(aa_1) = (bb_1) = \mathfrak{O}$$

zur Bestimmung eines Kegelschnittbüschels, so werden die Grundpunkte desselben alle vier in einen und denselben Punkt $\mathfrak{O}$ hineinfallen; jeder weitere Kegelschnitt des Büschels kann mit den beiden Kegelschnitten

$$\mathfrak{A}^{(2)} = [aa_1] \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}^{(2)} = [bb_1]$$

keine anderen Punkte als die vier in $\mathfrak{O}$ zusammenfallenden gemein haben, muß daher auch in ein Linienpaar ausarten,



welches in $\mathfrak{D}$ seinen Doppelpunkt hat. Es muß aber die charakteristische Eigenschaft jedes Kegelschnittbüschels erhalten bleiben, daß nämlich jede Gerade von den Kegelschnitten des Büschels in Punktepaaren einer Punktinvolution geschnitten wird; folglich geht dies besondere Kegelschnittbüschel in eine Strahleninvolution $[\mathfrak{D}]$ über, deren Strahlenpaare ausgeartete Kegelschnitte des Büschels sind.

Wir können nun an Stelle der beiden erzeugenden Strahleninvolutionen zwei allgemeine Kegelschnittbüschel

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]$$

in projektive Beziehung setzen; ihr Erzeugnis wird dann eine Kurve vierter Ordnung, weil die beiden auf einer beliebigen Geraden g ausgeschnittenen Punktinvolutionen im allgemeinen vier solche Punkte liefern, in denen ein Punkt des einen Paares mit einem Punkte des entsprechenden Paares koinzidiert (§ 4, 3). Wir können es aber so einrichten, daß die erzeugte Kurve vierter Ordnung zerfällt, indem ein Teil der Durchschnittspunkte entsprechender Elemente eine gerade Linie erfüllt, also der übrige Ort der Durchschnittspunkte eine $C^{(3)}$ erfüllen muß. Dies war auch bei den beiden erzeugenden Strahleninvolutionen der Fall wegen ihrer halbperspektiven Lage, weil in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei Strahlen vereinigt waren, die entsprechenden Strahlenpaaren angehörten.

Zwei Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ und $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]$, die auf einer Geraden g dieselbe Strahleninvolution ausschneiden und durch diese zugleich in projektive Beziehung gesetzt werden, erfüllen die geforderte Bedingung; die übrigen Schnittpunktpaare je zwei entsprechender Kegelschnitte der Büschel werden daher eine $C^{(3)}$ erzeugen müssen. Solche Kegelschnittbüschel lassen sich nun auf verschiedene Art herstelleu.

2. Nehmen wir die neun Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}_1,\ 1,\ 2$$

beliebig und unabhängig voneinander an, legen den Kegelschnitt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}1]$, welcher durch diese fünf Punkte gerade



bestimmt wird, und nehmen wir die vier Punkte $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 1$ als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels an, so wird jeder Kegelschnitt desselben dem ersten Kegelschnitt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}1]$ außer in dem Punkte 1 noch in drei übrigen Punkten begegnen, die ein Dreieck bilden. Die Seiten aller dieser Dreiecke umhüllen bekanntlich (Th. d. K. S. 242) einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher auch dem Dreieck $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1$ einbeschrieben ist.

Nehmen wir in gleicher Weise den festen Kegelschnitt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}2]$ und legen ein Kegelschnittbüschel durch die vier Grundpunkte $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 2$, so schneiden die Kegelschnitte desselben den festen Kegelschnitt außer in 2 noch in je drei Punkten, die ein Dreieck bilden. Die Seiten aller dieser Dreiecke umhüllen ebenfalls einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, der dem Dreieck $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1$ einbeschrieben ist.

Nun haben die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ bereits drei gemeinschaftliche Tangenten

$$|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1|,$$

folglich noch eine vierte reelle gemeinschaftliche Tangente g, die in linearer Weise zu konstruieren ist. Diese Gerade g muß die doppelte Eigenschaft besitzen, daß sowohl die beiden Schnittpunkte von g und $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}1]$ mit den vier Punkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, 1 auf einem Kegelschnitt liegen, als auch die beiden Schnittpunkte von g und $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}2]$ mit den vier Punkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, 2 auf einem Kegelschnitt liegen. Nennen wir diese beiden Kegelschnitte

$$K_1^{(2)} \quad \text{und} \quad K_2^{(2)},$$

so werden sie außer den drei gemeinschaftlichen Punkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ noch einen reellen vierten gemeinschaftlichen Punkt

$$\mathfrak{D}_1$$

haben, der in linearer Weise konstruiert werden kann.

Jetzt besitzt also die gefundene Gerade g die verlangte Eigenschaft, daß die beiden Kegelschnittbüschel

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1]$$

auf der Geraden g dieselbe Punktinvolution ausschneiden, welche durch die vorigen beiden Punktepaare bestimmt



wird. Die übrigen beiden Schnittpunkte je zweier entsprechender Kegelschnitte, welche durch dasselbe Punktepaar der Involution auf g hindurchgehen, werden daher eine Kurve $C^{(3)}$ erfüllen, welche durch die gegebenen neun Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, 1, 2 hindurchgeht. (Diese Lösung des Problems ist von Chasles in den Comptes rendus tome XXXVI, 30. Mai 1853 angegeben.)

3. Nehmen wir andererseits die neun Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}_1,\ 1,\ 2,\ 3$$

beliebig und unabhängig voneinander an und legen die durch je fünf Punkte bestimmten beiden Kegelschnitte

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\,12] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\,12],$$

so haben dieselben außer 12 noch zwei weitere gemeinschaftliche Punkte, deren immer reelle Verbindungslinie die zweite gemeinschaftliche Sekante

$$g$$

der beiden Kegelschnitte ist. Nennen wir das (reelle oder konjugiert-imaginäre) Punktepaar auf g

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1,$$

dann schneiden die durch je vier Punkte als Grundpunkte bestimmten beiden Kegelschnittbüschel

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}3] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 3]$$

auf g zwei Punktinvolutionen aus, welche ein gemeinschaftliches (reelles oder konjugiert-imaginäres) Punktepaar:

$$\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$$

haben.

Die beiden Punktepaare

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$$

bestimmen auf g eine neue Punktinvolution $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$, und die beiden Kegelschnitte

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$$

laufen daher jeder durch einen vierten festen Punkt

$$\mathfrak{D} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_1,$$

welche durch zwei dieser Kegelschnitte bestimmt werden.

Die beiden Kegelschnittbüschel

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]$$

schneiden auf der Geraden g dieselbe Punktinvolution aus und sind vermittelst derselben in projektive Beziehung gesetzt. Der Ort der übrigen beiden Schnittpunkte zweier entsprechenden Kegelschnitte der projektiven Büschel wird daher eine $C^{(3)}$ sein, welche durch die gegebenen neun Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, 1, 2, 3 hindurchgeht. (Diese Lösung des Problems ist von Chasles in den Comptes rendus tome XLI, 24. Decembre 1855 angegeben.)

In dem Falle, daß das Punktepaar $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$ konjugiert-imaginär ist, wird es durch eine elliptische Punktinvolution vertreten, die den beiden Kegelschnitten $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}12]$ und $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 12]$ gemeinsam zugehört. Auch das Punktepaar $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_1$ kann konjugiert-imaginär sein, sobald nämlich die beiden Punktinvolutionen, welche $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}3]$ und $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 3]$ auf g ausschneiden, beide hyperbolisch sind, und ihre Doppelpunkte sich trennen; diese beiden Paare von Doppelpunkten bestimmen aber dann eine neue elliptische Punktinvolution, deren konjugiert-imaginäre Doppelpunkte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ sind. Wir haben also auf g zwei elliptische Punktinvolutionen, die immer ein reelles gemeinsames Paar konjugierter Punkte besitzen. Diese bilden alsdann die Doppelpunkte einer hyperbolischen Punktinvolution auf g, welche die gesuchte $[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1]$ ist.

4. Es läßt sich noch in anderer Weise das Erzeugnis zweier projektiven Kegelschnittbüschel (eine Kurve 4. O.) so zerfällen, daß eine gerade Linie herausfällt und nur noch eine $C^{(3)}$ übrig bleibt. Wenn wir nämlich in den beiden projektiven Kegelschnittbüscheln

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]$$

denjenigen Kegelschnitt des ersten Büschels, welcher aus dem Linienpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ besteht, demjenigen des zweiten Büschels, welcher aus dem Linienpaar $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$ und $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$ besteht, entsprechen lassen und die Grundpunkte so wählen, daß die Strahlen



$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \equiv |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$$

identisch zusammenfallen, dann werden sämtliche Punkte dieser Geraden der Bedingung des Ortes genügen und der Ort der übrigen Schnittpunkte entsprechender Elemente beider projektiven Gebilde wird eine $C^{(3)}$ sein. Wir erreichen dies am besten, indem wir identifizieren

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}_1;$$

dann werden aber die Punkte $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ nicht mehr unabhängig voneinander sein, denn da das Linienpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ dem Linienpaare $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$ entsprechen soll, so muß der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{D},\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1)$$

dem Orte $C^{(3)}$ angehören. Diese Punkte dürfen also nicht mehr willkürlich gewählt werden, sondern nur drei von ihnen; wir wählen $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{C}_1$ und suchen $\mathfrak{D}_1$ dann so zu bestimmen, daß das Erzeugnis außerdem eine zu seiner Bestimmung notwendige und hinreichende Anzahl weiterer Punkte enthält. Wir werden sogleich sehen, daß hierzu noch vier weitere Punkte

$$1,\ 2,\ 3,\ 4$$

notwendig und hinreichend sind, damit das Problem ein völlig bestimmtes werde. Damit nun auch dem Linienpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ das Linienpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$ entsprechend sei, müssen wir noch einen übrigens beliebigen Punkt

$$5 \text{ auf } |\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$$

annehmen und können dann die Aufgabe so formulieren:

Es sind neun Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{C}_1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

willkürlich und unabhängig voneinander gegeben; man nimmt einen beliebigen Punkt 5 auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ an und verlangt einen solchen Punkt $\mathfrak{D}_1$ zu ermitteln, daß die Projektivität erfüllt wird

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}](12345) \barwedge [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1](12345),$$

in welcher allein der Punkt $\mathfrak{D}_1$ unbekannt, alle übrigen gegeben sind. Denn da $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, 5$ auf einer Geraden liegen, so



muß der Kegelschnitt [𝔄𝔅ℭ𝔇5] in ein Linienpaar ausarten | 𝔄𝔅 | und | ℭ𝔇 |, und ebenso der entsprechende Kegelschnitt in das Linienpaar | 𝔄𝔅 | und | $ℭ_1 𝔇_1$ |, und beide Linienpaare haben die Gerade | 𝔄𝔅 | gemeinschaftlich, welche mithin aus dem Erzeugnis herausfällt, so daß nur die Kurve $C^{(3)}$ übrig bleibt, welche durch die gegebenen neun Punkte hindurchgehen wird.

Das durch die vorgeschriebene Projektivität gegebene Problem ist aber schon von uns gelöst (§ 11, 2), denn das Kegelschnittbüschel [𝔄𝔅ℭ𝔇](12345) ist auf ein bekanntes einfaches Strahlbüschel zu reduzieren, z. B. durch die fünf Tangenten derselben in einem der vier Grundpunkte, und es bleibt also in dem Kegelschnittbüschel

$$[𝔄𝔅ℭ_1 𝔇_1](12345)$$

mit dem noch unbekannten Grundpunkt $𝔇_1$ dieser so zu bestimmen, daß die fünf Kegelschnitte den fünf Strahlen eines bekannten Strahlbüschels projektiv entsprechen.

Die in § 11, 2 gegebene Lösung zeigt uns, daß es nur einen einzigen solchen Punkt $𝔇_1$ giebt und wie derselbe auf lineare Weise konstruiert werden kann.

§ 13. Beziehungen zwischen den Berührungspunkten der Tangentenquadrupel, welche aus Punkten der $C^{(3)}$ an dieselbe gehen.

1. Wir haben in § 9, 6 gesehen, daß im allgemeinen aus einem Punkte 𝔒 der $C^{(3)}$ vier Tangenten an dieselbe gehen (außer der Tangente in 𝔒 selbst), und daß die vier Berührungspunkte derselben auf einem Kegelschnitte mit 𝔒 liegen, der in 𝔒 dieselbe Tangente hat, wie die $C^{(3)}$.

Nennen wir denjenigen Punkt, in welchem irgend eine Tangente in einem Punkte 𝔄 der $C^{(3)}$ derselben zum dritten Mal begegnet, den Tangentialpunkt zu dem Berührungspunkte 𝔄, so können wir den vorigen Satz auch so aussprechen, daß das Tangentenquadrupel denselben Tangentialpunkt 𝔒 hat.



Haben irgend zwei Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der $C^{(3)}$ die Tangentialpunkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, und schneidet $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ in $\mathfrak{C}$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ in $\mathfrak{c}$ die Kurve zum dritten Mal, so muß auch $\mathfrak{C}$ der Tangentialpunkt für $\mathfrak{c}$ sein (§ 8, 4). Wir können nun umgekehrt sagen: Schneidet eine Gerade die $C^{(3)}$ in drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, deren jeder ein Tangentenquadrupel an die $C^{(3)}$ sendet, und man nimmt irgend einen Berührungspunkt aus dem ersten Tangentenquadrupel, verbindet ihn mit irgend einem Berührungspunkt aus dem zweiten Tangentenquadrupel, so muß die Verbindungslinie durch einen gewissen Berührungspunkt aus dem dritten Tangentenquadrupel hindurchgehen. Diesen Zusammenhang der zwölf Berührungspunkte wollen wir näher untersuchen.

2. Wir nehmen eine Gerade g, welche $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ begegnet, nennen die Berührungspunkte der Tangentenquadrupel aus

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, & \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, & \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4, \end{array}$$

indem wir uns die Anordnung der Bezeichnung noch vorbehalten, und nennen

$\mathfrak{c}_1$ den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$,

dann wird $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1|$ nicht in $\mathfrak{c}_1$ schneiden können, sondern entweder in $\mathfrak{c}_2$ oder $\mathfrak{c}_3$ oder $\mathfrak{c}_4$; wir nennen

$\mathfrak{c}_2$ den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1|$

(ohne dadurch eine Beschränkung einzuführen); wir ziehen $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1|$, deren dritter Schnittpunkt weder $\mathfrak{c}_1$ noch $\mathfrak{c}_2$ sein kann, sondern nur noch entweder $\mathfrak{c}_3$ oder $\mathfrak{c}_4$ (weil sonst vier Punkte der $C^{(3)}$ auf einer Geraden lägen); wir nennen

$\mathfrak{c}_3$ den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1|$,

dann muß notwendig

$\mathfrak{c}_4$ der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1|$

sein. Nehmen wir nun einen der drei übrigen $\mathfrak{b}$-Punkte, so kann dies entweder nur $\mathfrak{b}_2$ oder $\mathfrak{b}_3$ oder $\mathfrak{b}_4$ sein; verbinden wir ihn mit $\mathfrak{a}_1$, so muß diese Verbindungslinie durch einen der $\mathfrak{c}$-Punkte gehen. Nennen wir denjenigen Punkt $\mathfrak{b}_2$, dessen Verbindungslinie mit $\mathfrak{a}_1$ durch $\mathfrak{c}_2$ geht, so haben wir

$\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$

in einer Geraden.

Wir haben nunmehr die drei Geraden

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|,$$
$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2|,$$
$$|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2|,$$

also bilden diese Punkte eine Gruppe von neun associierten Punkten (§ 10, 2); da aber $\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_2$ auf einer Geraden liegen, weil $\mathfrak{C}$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{c}_2$ ist, so müssen die sechs Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2$$

auf einem Kegelschnitt liegen; nun liegen aber auch die drei Punkte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1$ auf einer Geraden, also bilden die neun Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_1$$

wieder eine Gruppe von neun associierten Punkten; von diesen liegen aber $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ auf einer Geraden, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ auf einer zweiten Geraden, folglich müssen auch

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1$$

auf einer dritten Geraden liegen.

In gleicher Weise folgt, wenn wir einen der beiden noch übrigen Punkte $\mathfrak{b}_3$ oder $\mathfrak{b}_4$ nehmen, dessen Verbindungslinie mit $\mathfrak{a}_1$ ebenfalls durch einen der vier $\mathfrak{c}$-Punkte hindurchgehen muß, und denjenigen Punkt $\mathfrak{b}_3$ nennen, dessen Verbindungslinie mit $\mathfrak{a}_1$ durch $\mathfrak{c}_3$ geht, also

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3$$

in einer Geraden liegen, daß die drei Geraden

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|,$$
$$|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3|,$$
$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3|,$$

neun Punkte einer associierten Gruppe bilden, und da wieder $\mathfrak{C}\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_3$ auf einer Geraden liegen, so müssen die sechs Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_3$$

auf einem Kegelschnitt liegen. Fügen wir die drei in einer Geraden liegenden Punkte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1$ hinzu, so bilden auch die neun Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_1$$

eine Gruppe von neun associierten Punkten, und da $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ auf einer Geraden, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ auf einer zweiten Geraden liegen, so müssen auch

$$\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1$$

auf einer Geraden liegen.

Nehmen wir endlich den letzten Punkt $\mathfrak{b}_4$ und verbinden ihn mit $\mathfrak{a}_1$, so muß auch diese Verbindungslinie durch einen der vier $\mathfrak{c}$-Punkte gehen. Es kann aber $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4|$ nicht durch $\mathfrak{c}_1$ gehen, weil $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1|$ schon $\mathfrak{b}_1$ enthält, auch nicht durch $\mathfrak{c}_2$, weil $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_2|$ schon $\mathfrak{b}_2$ enthält, auch nicht durch $\mathfrak{c}_3$, weil $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_3|$ schon $\mathfrak{b}_3$ enthält, folglich muß $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4|$ durch $\mathfrak{c}_4$ gehen.

Wir haben daher

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_4$$

auf einer neuen Geraden, und hieraus folgt wieder in gleicher Weise, wie vorhin, daß auch

$$\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_1$$

auf einer Geraden liegen müssen. Zu diesen zehn erhaltenen Geraden treten nun noch sechs weitere. Ziehen wir nämlich $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3|$, so kann diese Gerade weder durch $\mathfrak{c}_1$, noch durch $\mathfrak{c}_2$, noch durch $\mathfrak{c}_3$ gehen, folglich muß sie durch $\mathfrak{c}_4$ gehen, also liegen

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_4$$

auf einer Geraden; ziehen wir $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4|$, so kann diese Gerade weder durch $\mathfrak{c}_1$, noch durch $\mathfrak{c}_2$, noch durch $\mathfrak{c}_4$ gehen, folglich muß sie durch $\mathfrak{c}_3$ gehen, also liegen

$$\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_3$$

auf einer Geraden; ziehen wir $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2|$, so kann diese Gerade weder durch $\mathfrak{c}_1$, noch durch $\mathfrak{c}_2$, noch durch $\mathfrak{c}_3$ gehen, folglich muß sie durch $\mathfrak{c}_4$ gehen, also liegen

$$\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4$$

auf einer Geraden; ziehen wir $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4|$, so kann diese Gerade weder durch $\mathfrak{c}_1$, noch durch $\mathfrak{c}_3$, noch durch $\mathfrak{c}_4$ gehen, muß also durch $\mathfrak{c}_2$ gehen, also liegen

$$\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_4\mathfrak{c}_2$$

auf einer Geraden; ziehen wir $|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2|$, so kann diese Gerade weder durch $\mathfrak{c}_1$, noch durch $\mathfrak{c}_2$, noch durch $\mathfrak{c}_4$ gehen, muß also durch $\mathfrak{c}_3$ gehen, also liegen

$$\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_3$$

auf einer Geraden; und ziehen wir endlich $|\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_3|$, so kann diese Gerade weder durch $\mathfrak{c}_1$, noch durch $\mathfrak{c}_3$, noch durch $\mathfrak{c}_4$ gehen, muß also durch $\mathfrak{c}_2$ gehen, also liegen

$$\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{c}_2$$

auf einer Geraden. Mehr Verbindungslinien aus den Gruppen, die von den früheren verschieden wären, lassen sich aber, wie leicht zu sehen ist, überhaupt nicht ziehen, also erhalten wir nach der gewählten Bezeichnungsweise folgendes Schema von 16 Geraden:

$$(S) \qquad \begin{cases} |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1|, & |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2|, & |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{c}_3|, & |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_4 \mathfrak{c}_4|, \\ |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_2|, & |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_1|, & |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{c}_4|, & |\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_4 \mathfrak{c}_3|, \\ |\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_3|, & |\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_4|, & |\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{c}_1|, & |\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_4 \mathfrak{c}_2|, \\ |\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_4|, & |\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_3|, & |\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{c}_2|, & |\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_4 \mathfrak{c}_1|. \end{cases}$$

Dies liefert eine merkwürdige Konfiguration von zwölf Punkten und 16 Geraden, indem auf jeder der 16 Geraden drei der zwölf Punkte liegen, und durch jeden der zwölf Punkte vier der 16 Geraden gehen.*

3. Diese Konfiguration führt zu einer Menge von weiteren Beziehungen. Nehmen wir nämlich von den zwölf Punkten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ irgend drei solche heraus, welche nicht in einer Geraden liegen, z. B.

$$\mathfrak{a}_1, \ \mathfrak{b}_2, \ \mathfrak{c}_3,$$

so schneiden die Verbindungslinien je zweier

$$\begin{array}{llllll} |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2| & \text{zum} & \text{dritten} & \text{Mal} & \text{in} & \mathfrak{c}_2, \\ |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}_3| & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \mathfrak{b}_3, \\ |\mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_3| & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \mathfrak{a}_4 \end{array}$$

und es liegen nach unserm Schema (S)

$$\mathfrak{a}_4 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{c}_2$$

auf einer Geraden. Dies giebt folgenden Satz:

---

* Vergl. O. Hesse: „Über Kurven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Kurven in drei verschiedenen Punkten berühren". (Crelle's Journal f. Math. Bd. XXXVI S. 153.)

Schneidet eine Gerade g die $C^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, und man legt aus jedem derselben eine beliebige Tangente an $C^{(3)}$ (aus jedem Tangentenquadrupel je eine beliebige), welche in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ berühren mögen, dann schneiden die drei Seiten dieses Dreiecks $|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ die $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten, welche in einer Geraden liegen.

Dies folgt auch daraus, daß $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei Punkte sind, in welchen ein Kegelschnitt die $C^{(3)}$ berühren kann (als spezieller Fall von dem Satze § 9, 5).

Wir wissen ferner, weil die drei Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1$ auf einer Geraden liegen (denn $\mathfrak{A}$ ist der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{a}_1$) und

durch $\mathfrak{A}$ die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$,
" $\mathfrak{a}_1$ " " $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|$,
" $\mathfrak{a}_1$ " " $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2|$

geht, daß die sechs Punkte

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_2$$

auf einem Kegelschnitt liegen müssen; stellen wir diese zu dem Pascalschen Sechseck zusammen

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2,$$

so folgt, daß die drei Schnittpunkte

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_2),\quad (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_1),\quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_2) \equiv \mathfrak{a}_2$$

auf einer Geraden liegen müssen; aus gleichem Grunde liegen auch

$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_3)$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_4)$, $\mathfrak{a}_2$ auf einer Geraden,
$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_3)$, $\mathfrak{a}_3$ " " "
$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_4)$, $\mathfrak{a}_3$ " " "
$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_1)$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_4)$, $\mathfrak{a}_4$ " " "
$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_2)$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_3)$, $\mathfrak{a}_4$ " " "

Bezeichnen wir daher die vier Punkte

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_1) = \mathfrak{z}_1,$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_2) = \mathfrak{z}_2,$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_3) = \mathfrak{z}_3,$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_4) = \mathfrak{z}_4,$$

so haben wir gefunden

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\mathfrak{a}_2,\quad \mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_3\mathfrak{a}_3,\quad \mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_4\mathfrak{a}_4,$$
$$\mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_4\mathfrak{a}_2,\quad \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_4\mathfrak{a}_3,\quad \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3\mathfrak{a}_4$$

in je einer Geraden, also

$$(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2,\ \mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_4) = \mathfrak{a}_2,\quad (\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_3,\ \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_4) = \mathfrak{a}_3,\quad (\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_4,\ \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3) = \mathfrak{a}_4,$$

d. h. $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_4$.

Andererseits wissen wir auch, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_4$ auf einer Geraden liegen (weil $\mathfrak{A}$ Tangentialpunkt für $\mathfrak{a}_4$ ist), und es gehen

durch $\mathfrak{A}$ die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$,

" $\mathfrak{a}_4$ " " $|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_4|$,

" $\mathfrak{a}_4$ " " $|\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3|$,

folglich liegen die sechs Punkte

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{c}_4$$

auf einem Kegelschnitt, und das Pascalsche Sechseck

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4\mathfrak{C}\mathfrak{c}_3$$

liefert die Pascalsche Gerade der drei Punkte

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_4),\quad (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_3),\quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3,\ \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_4) = \mathfrak{a}_3;$$

da nun identisch

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1| \equiv |\mathfrak{B}\mathfrak{s}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2| \equiv |\mathfrak{B}\mathfrak{s}_2|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_3| \equiv |\mathfrak{C}\mathfrak{s}_3|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_4| \equiv |\mathfrak{C}\mathfrak{s}_4|,$$

und außerdem

$$\mathfrak{a}_3 \equiv (\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_3,\ \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_4),$$

so muß auch das Sechseck

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{B}\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_4\mathfrak{C}\mathfrak{s}_3$$

ein Pascalsches sein, also die sechs Punkte

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{s}_1,\ \mathfrak{s}_2,\ \mathfrak{s}_3,\ \mathfrak{s}_4$$

müssen auf einem Kegelschnitt liegen; die beiden Strahlbüschel

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_4) \barwedge \mathfrak{C}(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_4)$$

müssen daher projektiv sein oder die mit ihnen identischen Strahlbüschel $\mathfrak{B}(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4) \barwedge \mathfrak{C}(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4)$, d. h.

Legt man aus irgend zwei Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die Tangentenquadrupel, so sind die aus ihnen gebildeten Doppelverhältnisse einander gleich (in gehöriger Zuordnung), ein Satz, den wir schon früher auf

andere Weise bewiesen haben (§ 9, 6). Hier zeigt sich zugleich, wie die Zuordnung geschehen muß.

Aus der bekannten Eigenschaft des Doppelverhältnisses folgen noch die drei übrigen Projektivitäten

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4) &\barwedge \mathfrak{C}(\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_3),\\ &\barwedge \mathfrak{C}(\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2),\\ &\barwedge \mathfrak{C}(\mathfrak{c}_4\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_1).\end{aligned}$$

4. Die beiden Tangentenquadrupel aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durchschneiden sich im Ganzen in 16 Punkten, die wir in folgender Weise bezeichnen können

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_1)=\mathfrak{s}_{11};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_2)=\mathfrak{s}_{12};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_3)=\mathfrak{s}_{13};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_4)=\mathfrak{s}_{14},\\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_1)=\mathfrak{s}_{21};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_2)=\mathfrak{s}_{22};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_3)=\mathfrak{s}_{23};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_4)=\mathfrak{s}_{24},\\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_1)=\mathfrak{s}_{31};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_2)=\mathfrak{s}_{32};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_3)=\mathfrak{s}_{33};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_4)=\mathfrak{s}_{34},\\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_1)=\mathfrak{s}_{41};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_2)=\mathfrak{s}_{42};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_3)=\mathfrak{s}_{43};\ (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4, \mathfrak{C}\mathfrak{c}_4)=\mathfrak{s}_{44},\end{array}\right.$$

$$\mathfrak{s}_{ik}\ \ (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

wobei aber $\mathfrak{s}_{ik}$ und $\mathfrak{s}_{ki}$ wesentlich voneinander verschieden sind, indem der erste Index sich immer auf $\mathfrak{B}$, der zweite auf $\mathfrak{C}$ bezieht. Nach dieser Bezeichnung haben wir zwischen den 16 Durchschnittspunkten der beiden Tangentenquadrupel aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, und den vier Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ die 24 Geraden, welche je drei Punkte enthalten

$$(\mathrm{T})\quad\left\{\begin{array}{llll}|\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}_{12}\mathfrak{s}_{21}|, & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}_{22}|, & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}_{33}|, & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}_{44}|,\\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}_{13}\mathfrak{s}_{31}|, & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{s}_{33}\mathfrak{s}_{44}|, & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{s}_{22}\mathfrak{s}_{44}|, & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{s}_{22}\mathfrak{s}_{33}|,\\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}_{14}\mathfrak{s}_{41}|, & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{s}_{32}\mathfrak{s}_{14}|, & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{s}_{14}\mathfrak{s}_{23}|, & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{s}_{12}\mathfrak{s}_{34}|,\\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}_{23}\mathfrak{s}_{32}|, & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{s}_{23}\mathfrak{s}_{41}|, & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{s}_{41}\mathfrak{s}_{32}|, & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{s}_{21}\mathfrak{s}_{43}|,\\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}_{24}\mathfrak{s}_{42}|, & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{s}_{13}\mathfrak{s}_{42}|, & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{s}_{12}\mathfrak{s}_{43}|, & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{s}_{13}\mathfrak{s}_{24}|,\\ |\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}_{34}\mathfrak{s}_{43}|, & |\mathfrak{a}_2\mathfrak{s}_{31}\mathfrak{s}_{24}|, & |\mathfrak{a}_3\mathfrak{s}_{21}\mathfrak{s}_{34}|, & |\mathfrak{a}_4\mathfrak{s}_{31}\mathfrak{s}_{42}|.\end{array}\right.$$

Ferner ergiebt sich aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse (3.)

$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}_{22}\mathfrak{s}_{33}\mathfrak{s}_{44}$ auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$,

$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{s}_{12}\mathfrak{s}_{34}\mathfrak{s}_{21}\mathfrak{s}_{43}$ „ „ „ $\mathfrak{K}_2^{(2)}$,

$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{s}_{13}\mathfrak{s}_{24}\mathfrak{s}_{31}\mathfrak{s}_{42}$ „ „ „ $\mathfrak{K}_3^{(2)}$,

$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{s}_{14}\mathfrak{s}_{23}\mathfrak{s}_{32}\mathfrak{s}_{41}$ „ „ „ $\mathfrak{K}_4^{(2)}$.

Folglich wird für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, da

$$\begin{cases} (\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}_{22},\ \mathfrak{s}_{33}\mathfrak{s}_{44}) = \mathfrak{a}_2, \\ (\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}_{33},\ \mathfrak{s}_{22}\mathfrak{s}_{44}) = \mathfrak{a}_3, \\ (\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}_{44},\ \mathfrak{s}_{22}\mathfrak{s}_{33}) = \mathfrak{a}_4 \end{cases}$$

ist, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ ein Polardreieck (selbstkonjugiertes Dreieck) sein.

Für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2^{(2)}$ wird

$$\begin{cases} (\mathfrak{s}_{12}\mathfrak{s}_{21},\ \mathfrak{s}_{34}\mathfrak{s}_{43}) = \mathfrak{a}_1, \\ (\mathfrak{s}_{12}\mathfrak{s}_{34},\ \mathfrak{s}_{21}\mathfrak{s}_{43}) = \mathfrak{a}_4, \\ (\mathfrak{s}_{12}\mathfrak{s}_{43},\ \mathfrak{s}_{21}\mathfrak{s}_{34}) = \mathfrak{a}_3, \end{cases}$$

also ist $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ ein Polardreieck.

Für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_3^{(2)}$ ist

$$\begin{cases} (\mathfrak{s}_{13}\mathfrak{s}_{31},\ \mathfrak{s}_{24}\mathfrak{s}_{42}) = \mathfrak{a}_1, \\ (\mathfrak{s}_{13}\mathfrak{s}_{24},\ \mathfrak{s}_{31}\mathfrak{s}_{42}) = \mathfrak{a}_4, \\ (\mathfrak{s}_{13}\mathfrak{s}_{42},\ \mathfrak{s}_{31}\mathfrak{s}_{24}) = \mathfrak{a}_2, \end{cases}$$

also ist $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4$ ein Polardreieck, und endlich für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_4^{(2)}$ ist:

$$\begin{cases} (\mathfrak{s}_{14}\mathfrak{s}_{41},\ \mathfrak{s}_{23}\mathfrak{s}_{32}) = \mathfrak{a}_1, \\ (\mathfrak{s}_{14}\mathfrak{s}_{23},\ \mathfrak{s}_{41}\mathfrak{s}_{32}) = \mathfrak{a}_3, \\ (\mathfrak{s}_{14}\mathfrak{s}_{32},\ \mathfrak{s}_{41}\mathfrak{s}_{23}) = \mathfrak{a}_2, \end{cases}$$

also $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ ein Polardreieck. Wir bemerken auch, weil die beiden Sehnen

$$|\,\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}_{22}\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{s}_{33}\mathfrak{s}_{44}\,|$$

des Kegelschnitts $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ sich in $\mathfrak{a}_2$ schneiden, daß alle durch $\mathfrak{a}_2$ gezogenen Strahlen den Kegelschnitt in Punktepaaren treffen müssen, welche von $\mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{C}$) aus gesehen unter einer Strahleninvolution erscheinen; insbesondere ist ein Strahlenpaar der durch $\mathfrak{a}_2$ gehende Strahl und die Tangente in $\mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{C}$); da aber die Strahlenpaare

$$|\,\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1\,| \text{ und } |\,\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2\,|, \quad |\,\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3\,| \text{ und } |\,\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4\,|$$

eine Strahleninvolution bestimmen, welcher auch das Strahlenpaar $|\,\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1\,|$ und $|\,\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2\,|$ angehören muß, weil

$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{s}_{14} \text{ und } \mathfrak{s}_{23}, \quad \mathfrak{s}_{41} \text{ und } \mathfrak{s}_{32}$$

die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind [Tab. (T)], so wird $|\,\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1\,|$ die Tangente in $\mathfrak{B}$ am Kegel-

schnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ sein, und aus gleichem Grunde wird $|\mathfrak{C}\mathfrak{a}_1|$ die Tangente in $\mathfrak{C}$ am Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ sein; mithin ist $\mathfrak{a}_1$ der Pol von $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$.

Wir können somit den vorigen Resultaten noch hinzufügen:

Für den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ sind $\mathfrak{a}_1$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ Pol und Polare,
" " " $\mathfrak{K}_2^{(2)}$ " $\mathfrak{a}_2$ " $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ " " "
" " " $\mathfrak{K}_3^{(2)}$ " $\mathfrak{a}_3$ " $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ " " "
" " " $\mathfrak{K}_4^{(2)}$ " $\mathfrak{a}_4$ " $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ " " " .

Zusammengefaßt erhalten wir folgenden Satz:

Schneidet eine Gerade g die $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, und haben die Tangentenquadrupel aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ an die $C^{(3)}$ bez. die Berührungspunkte

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4,$$

so schneiden sich die beiden Tangentenquadrupel aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ in 16 Punkten, von denen viermal vier Durchschnittspunkte:

$$\mathfrak{s}_{ik} \ (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ auf je einem Kegelschnitt liegen

$$\mathfrak{K}_1^{(2)}, \quad \mathfrak{K}_2^{(2)}, \quad \mathfrak{K}_3^{(2)}, \quad \mathfrak{K}_4^{(2)}.$$

Für diese vier Kegelschnitte sind die Pole der Geraden g die vier Berührungspunkte $(\mathfrak{a}_i)$ des Tangentenquadrupels aus $\mathfrak{A}$; für denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_i^{(2)}$, für welchen $\mathfrak{a}_i$ und g Pol und Polare sind, bilden die drei übrigen Punkte $\mathfrak{a}$ ein Polardreieck, nämlich das Diagonaldreieck desjenigen vollständigen Vierecks, welches von den vier Punkten $\mathfrak{s}_{ik}$ gebildet wird und dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_i^{(2)}$ einbeschrieben ist.

Dieser Satz gilt natürlich dreimal, da wir $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ miteinander vertauschen können.

5. Da nach Tabelle (T) die Punktepaare

$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{s}_{14} \text{ und } \mathfrak{s}_{23}, \quad \mathfrak{s}_{41} \text{ und } \mathfrak{s}_{32}$$

die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind, also z. B. von dem Punkte $\mathfrak{B}$ aus gesehen unter den drei

Strahlenpaaren einer Involution erscheinen, so erhalten wir die drei Strahlenpaare

$$
\begin{array}{ccc}
|\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1| & \text{und} & |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2|, \\
|\mathfrak{B}\mathfrak{s}_{14}| \equiv |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1| & \text{und} & |\mathfrak{B}\mathfrak{s}_{23}| \equiv |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|, \\
|\mathfrak{B}\mathfrak{s}_{41}| \equiv |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4| & \text{und} & |\mathfrak{B}\mathfrak{s}_{32}| \equiv |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3|,
\end{array}
$$

d. h. die drei Strahlenpaare

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4|$$

als einer Strahleninvolution angehörig.

Andererseits sind aber infolge des Schema (S) (2.) auch die Punktepaare

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2,$$

die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits; also gehören auch die drei Strahlenpaare

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_1| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_2|$$

einer Involution an, welche mit der vorigen identisch ist, weil sie zwei Strahlenpaare mit ihr gemein hat.

In gleicher Weise folgt aus der Tabelle (S) wegen des vollständigen Vierseits, dessen drei Paare Gegenecken sind

$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{b}_3 \text{ und } \mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_3 \text{ und } \mathfrak{c}_4,$$

daß auch die Strahlenpaare

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_3| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_4|$$

einer Involution angehören, die ebenfalls mit der ersten identisch ist, weil sie zwei Strahlenpaare mit ihr gemein hat; und endlich wegen des vollständigen Vierseits, dessen drei Paar Gegenecken

$$\mathfrak{a}_3 \text{ und } \mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{b}_3 \text{ und } \mathfrak{b}_4, \quad \mathfrak{c}_1 \text{ und } \mathfrak{c}_2$$

sind, daß auch die Strahlenpaare

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{a}_3| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_4|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_1| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_2|$$

derselben Strahleninvolution angehören.

Wir haben demgemäß sechs Strahlenpaare einer und derselben Strahleninvolution



$$\left\{\begin{array}{lcl} |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1| & \text{und} & |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_3| & „ & |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_4|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1| & „ & |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3| & „ & |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_1| & „ & |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_2|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_3| & „ & |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_4|. \end{array}\right.$$

Es würde ermüdend sein, wollten wir dieselbe Betrachtung wiederholen, indem wir von andern vollständigen Vierseiten ausgehen, wie sie die Tabelle (T) und das Schema (S) in großer Menge darbieten. Es genüge, das leicht abzulesende Resultat anzugeben; es zeigt sich nämlich, daß $\mathfrak{B}$ gleichzeitig der Mittelpunkt für drei verschiedene Strahleninvolutionen wird, deren Strahlenpaare nach den Berührungspunkten $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{c}_i$ hingehen; jede solche Strahleninvolution weist sechs Strahlenpaare auf. Dasselbe gilt für $\mathfrak{C}$ und natürlich auch für $\mathfrak{A}$, weil diese Punkte beliebig miteinander vertauscht werden dürfen. Wir erhalten demgemäß drei Gruppen von je drei Strahleninvolutionen, deren Strahlenpaare wir so zusammenstellen können:

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_2|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_3|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_4|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_2|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_3|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_4|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_2|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_3|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_4|; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_3|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_4|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_2|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_3|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_4|; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_2|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_3|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_4|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_2|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_3|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_4|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_3|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_4|; \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_3|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_2|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_4|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_3|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_2|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_4|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_3|, \\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_2|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_4|; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_3|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_4|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_3|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_2|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_4|; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_3|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_2|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_4|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_3|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_2|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_4|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_3|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_4|; \end{array}\right.$$

$$\text{III.}\quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_4|,\\ |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_2|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_3|,\\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_4|,\\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_2|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{b}_3|,\\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_4|,\\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_2|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{c}_3|; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_4|,\\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_2|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{a}_3|,\\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_4|,\\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_2|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{b}_3|,\\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_4|,\\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_2|,\ |\mathfrak{B}\mathfrak{c}_3|; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_4|,\\ |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_2|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{a}_3|,\\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_4|,\\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_2|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{b}_3|,\\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_4|,\\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_2|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{c}_3|. \end{array}\right.$$

Von solchen drei Strahleninvolutionen I, II, III, z. B. aus $\mathfrak{A}$, die bestimmt werden durch zwei Paare, welche sich auf drei Arten aus den vier Strahlen

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_2|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_3|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_4|$$

bilden lassen, sind bekanntlich (wenn die vier Strahlen reell sind) immer zwei hyperbolisch und eine elliptisch. (Th. d. K. S. 56) (Siehe § 15.)

§ 14. Weitere Beziehungen und Folgerungen aus denselben.

1. Lassen wir in dem allgemeinen Satze (§ 13, 4) insbesondere die Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zusammenfallen, so fällt das Tangentenquadrupel aus $\mathfrak{B}$ auch mit dem Tangentenquadrupel aus $\mathfrak{C}$ zusammen und die Schnittpunkte

$$\mathfrak{S}_{11},\ \mathfrak{S}_{22},\ \mathfrak{S}_{33},\ \mathfrak{S}_{44}$$

gehen in die Berührungspunkte über des Tangentenquadrupels aus $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$. $\mathfrak{A}$ wird der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ geht in die konische Polare $\mathfrak{B}^{(2)}$ des Punktes $\mathfrak{B}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$ über, und das Diagonaldreieck

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{22},\ \mathfrak{S}_{33}\mathfrak{S}_{44}) &= \mathfrak{a}_2,\\ (\mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{33},\ \mathfrak{S}_{22}\mathfrak{S}_{44}) &= \mathfrak{a}_3,\\ (\mathfrak{S}_{11}\mathfrak{S}_{44},\ \mathfrak{S}_{22}\mathfrak{S}_{33}) &= \mathfrak{a}_4 \end{aligned}$$

fällt identisch zusammen (§ 13, 4) mit dem von den drei übrigen Berührungspunkten der Tangenten aus $\mathfrak{A}$ an die $C^{(3)}$ gebildeten Dreieck, während die aus $\mathfrak{A}$ gehende vierte Tangente $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ den Berührungspunkt $\mathfrak{B}$ hat; also erhalten wir den Satz:



Geht aus einem Punkte $\mathfrak{A}$ der $C^{(3)}$ das Tangentenquadrupel

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_2|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_3|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{a}_4|$$

an dieselbe, dessen Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ sind, und legt man aus einem derselben, z. B. aus $\mathfrak{a}_1$, aufs neue das Tangentenquadrupel

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{t}_1|, \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{t}_2|, \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{t}_3|, \quad |\mathfrak{a}_1\mathfrak{t}_4|$$

an die $C^{(3)}$, dessen Berührungspunkte $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, $\mathfrak{t}_4$ seien, so bilden dieselben ein vollständiges Viereck, dessen Diagonaldreieck

$$(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4) = \mathfrak{a}_2,$$
$$(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4) = \mathfrak{a}_3,$$
$$(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4,\ \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3) = \mathfrak{a}_4$$

identisch zusammenfällt mit dem Dreieck, welches von den drei übrigen Berührungspunkten

$$\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_4$$

gebildet wird.

Durch das vollständige Viereck $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4$ gehen drei Linienpaare, deren Durchbohrungssehnen mit der $C^{(3)}$ (nämlich die Tangenten in $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$) durch den Punkt $\mathfrak{A}$ laufen; folglich ist $\mathfrak{A}$ der Gegenpunkt des Punktquadrupels $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4$ (§ 9, 1). Geht nun durch $\mathfrak{A}$ die beliebige Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, wie früher, so müssen auch die sechs Punkte

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_4$$

auf einem Kegelschnitt liegen. Wir haben also den Satz:

Jeder durch die vier Berührungspunkte eines Tangentenquadrupels (aus $\mathfrak{a}_1$) gelegte Kegelschnitt schneidet die $C^{(3)}$ in zwei neuen Punkten, deren Verbindungslinie beständig durch den Tangentialpunkt ($\mathfrak{A}$) desjenigen Kurvenpunktes läuft, von welchem das Tangentenquadrupel ausging.

Oder auch:

Der Gegenpunkt zu den vier Berührungspunkten eines Tangentenquadrupels ist der Tangentialpunkt desjenigen Punktes der $C^{(3)}$, von welchem das Tangentenquadrupel ausging.



Oder auch:

Geht aus einem Punkte $\mathfrak{a}_1$ der $C^{(3)}$ ein Tangentenquadrupel an dieselbe, so bilden die vier Berührungspunkte desselben ein vollständiges Viereck, dessen drei Diagonalpunkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ denselben Tangentialpunkt $\mathfrak{A}$ haben, wie $\mathfrak{a}_1$.

Ziehen wir durch $\mathfrak{A}$ die beliebige Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ und legen auch aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die Tangentenquadrupel an die $C^{(3)}$, deren Durchschnittspunkte

$$\mathfrak{s}_{11},\ \mathfrak{s}_{22},\ \mathfrak{s}_{33},\ \mathfrak{s}_{44},$$

wie wir oben (§ 13, 4) gesehen haben, mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ auf einem Kegelschnitt liegen und ein vollständiges Viereck bilden, dessen drei Diagonalpunkte ebenfalls $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ sind, so sehen wir, daß die beiden Kegelschnitte

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{s}_{11}\mathfrak{s}_{22}\mathfrak{s}_{33}\mathfrak{s}_{44}]$$

nicht nur die Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gemein haben, sondern auch ein gemeinschaftliches Polardreieck $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$, woraus folgt, daß sie identisch sein müssen, da es nur einen Kegelschnitt giebt, welcher durch zwei Punkte geht und ein gegebenes Dreieck zum Polardreieck hat; also liegen die zehn Punkte

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_4,\ \mathfrak{s}_{11},\ \mathfrak{s}_{22},\ \mathfrak{s}_{33},\ \mathfrak{s}_{44}$$

auf einem und demselben Kegelschnitt. Wir können hiernach zu dem in § 13, 4 gefundenen Satze noch den Zusatz machen:

Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ hat nicht bloss $\mathfrak{a}_1$ und g zu Pol und Polare, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ zum Polardreieck, sondern geht auch durch die vier Berührungspunkte desjenigen Tangentenquadrupels, welches aus $\mathfrak{a}_1$ an die $C^{(3)}$ gelegt werden kann.

2. Da aus $\mathfrak{A}$ das Tangentenquadrupel an die $C^{(3)}$ geht, dessen Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ sind, so liegen die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ auf einem Kegelschnitt (der konischen Polare $\mathfrak{A}^{(2)}$), welcher in $\mathfrak{A}$ dieselbe Tangente hat, wie die $C^{(3)}$. Da ferner aus $\mathfrak{a}_1$ das Tangentenquadrupel an die $C^{(3)}$ geht, dessen Berührungspunkte $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, $\mathfrak{t}_4$ sind, so liegen



auch die Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_4$ auf einem Kegelschnitt (der konischen Polare $\mathfrak{a}_1^{(2)}$), welcher in $\mathfrak{a}_1$ dieselbe Tangente, nämlich $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{A}|$ hat, wie die $C^{(3)}$.

Sodann ist, wie wir wissen, $\mathfrak{A}$ der Gegenpunkt für das Punktquadrupel $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4$, d. h. sämtliche Kegelschnitte des Büschels $[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4]$ schneiden auf der $C^{(3)}$ Sehnen aus, die durch $\mathfrak{A}$ laufen. Dieses Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_4$ schneidet auf der Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|$ eine Punktinvolution aus, deren einer Doppelpunkt $\mathfrak{a}_1$ ist, weil der besondere Kegelschnitt $[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4] = \mathfrak{a}_1^{(2)}$ die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|$ in $\mathfrak{a}_1$ berührt. Um den andern Doppelpunkt dieser Punktinvolution zu ermitteln, berücksichtigen wir die gegenseitige Lage der betrachteten Punkte.

Es liegen nämlich wegen des Diagonaldreiecks

$$(\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4) = \mathfrak{a}_2,$$
$$(\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_4) = \mathfrak{a}_3,$$
$$(\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_4,\ \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3) = \mathfrak{a}_4$$

sowohl $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2$ auf einer Geraden, als auch wegen der aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}_1$ gelegten Tangenten

$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{t}_4 \mathfrak{t}_4$ auf einer Geraden,
$\mathfrak{A} \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_3$ „ „ „

ferner aber auch $\mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_4 \mathfrak{a}_3$ auf einer Geraden, folglich die übrigen sechs Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{t}_4,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3$$

notwendig auf einem Kegelschnitt.

Ferner liegen

$\mathfrak{a}_2 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_1$ auf einer Geraden,
$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_3$ „ „ „
$\mathfrak{A} \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_3$ „ „ „

da nun auch $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{a}_3$ auf einer Geraden liegen, so müssen die übrigen sechs Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3$$

auf einem Kegelschnitt liegen. Aus den beiden Kegelschnitten

$$[\mathfrak{A} \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_4 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{A} \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3]$$

folgen die Projektivitäten

$$\mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4) \barwedge \mathfrak{a}_3(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4), \quad \mathfrak{a}_3(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3) \barwedge \mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3);$$

da nun aber

$$\mathfrak{a}_3(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4) \equiv \mathfrak{a}_3(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_2),$$

so ist auch

$$\mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4) \barwedge \mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_2),$$

also

$$\mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4) \barwedge \mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_1).$$

Hieraus ergiebt sich, daß das Quadrat des Doppelverhältnisses

$$\{\mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4)\}^2 = 1,$$

also

$$\mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4) = \pm 1$$

sein muß; der Wert $+1$ fällt als illusorisch heraus, weil weder $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{A}$, noch $\mathfrak{t}_1$ mit $\mathfrak{t}_4$ im allgemeinen zusammenfallen wird; folglich muß

$$\mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_4) = -1,$$

sein, d. h. das Linienpaar durch $\mathfrak{a}_2$, nämlich $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ und $|\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4|$ trennt harmonisch die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}_1$.

Dasselbe gilt in gleicher Weise von dem Linienpaar $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3|$ und $|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4|$ durch $\mathfrak{a}_3$ und auch von dem dritten Linienpaar; die Punktinvolution, welche das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4]$ auf $\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1$ ausschneidet, hat daher die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}_1$ zu Doppelpunkten; von $\mathfrak{a}_1$ hatten wir diese Eigenschaft bereits erkannt. Da die Doppelpunkte dieser Involution konjugierte Punkte für sämtliche Kegelschnitte des Büschels sind, so können wir den Satz aussprechen:

Legt man aus einem Punkte $\mathfrak{a}_1$ einer $C^{(3)}$ das Tangentenquadrupel an dieselbe, dessen Berührungspunkte $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_4$ seien, und ist $\mathfrak{A}$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{a}_1$, so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}_1$ konjugierte Punkte für sämtliche Kegelschnitte des Büschels $[\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4]$; es giebt also insbesondere auch zwei Kegelschnitte dieses Büschels, welche in $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{a}_1$ die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|$ berühren.

3. Da die Polaren von $\mathfrak{a}_1$ in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels $[\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_4]$ durch $\mathfrak{A}$ gehen müssen, weil $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{A}$ konjugierte Punkte für dieselben sind, so beschreiben diese Polaren ein Strahlbüschel, welches mit dem

Kegelschnittbüschel $[t_1 t_2 t_3 t_4]$ bekanntlich projektiv ist. Die beiden projektiven Gebilde erzeugen also eine Kurve dritter Ordnung, dieselbe geht durch $t_1 t_2 t_3 t_4$, den Gegenpunkt $\mathfrak{A}$, ferner durch $\mathfrak{a}_1$ und berührt $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|$ in $\mathfrak{a}_1$, weil für den besonderen Kegelschnitt $(t_1 t_2 t_3 t_4 \mathfrak{a}_1)$ die Polare von $\mathfrak{a}_1$ die Tangente in $\mathfrak{a}_1$ ist; sodann auch, weil dem Linienpaar $|t_1 t_2|$, $|t_3 t_4|$ die Polare von $\mathfrak{a}_1$, d. h. die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_2|$ entspricht und die beiden Schnittpunkte derselben mit dem Linienpaar in $\mathfrak{a}_2$ zusammenfallen, ist $\mathfrak{a}_2$ ein doppelt zu zählender Punkt des Erzeugnisses, ebenso $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_4$. Das Erzeugnis ist daher mit unserer Kurve $C^{(3)}$ identisch, weil es schon dreizehn Punkte mit ihr gemein hat. Die Polare von $\mathfrak{a}_1$ in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels geht durch die beiden Berührungspunkte des Tangentenpaares, welches aus $\mathfrak{a}_1$ an den Kegelschnitt gelegt werden kann. Wir können also als Ergänzung des letzten Satzes hinzufügen:

Wählt man die Berührungspunkte eines Tangentenquadrupels (aus $\mathfrak{a}_1$) zu Grundpunkten eines erzeugenden Kegelschnittbüschels, so ist der Gegenpunkt der Tangentialpunkt $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{a}_1$. Die Kurve $C^{(3)}$ selbst erscheint als der Ort der Berührungspunkte sämtlicher Tangentenpaare, welche aus $\mathfrak{a}_1$ an die Kegelschnitte des Büschels gelegt werden können. Die $C^{(3)}$ geht auch durch die drei Diagonalpunkte des von den vier Grundpunkten gebildeten vollständigen Vierecks, und diese Diagonalpunkte haben denselben Tangentialpunkt $\mathfrak{A}$, welchen $\mathfrak{a}_1$ hat.

Auch ist umgekehrt durch fünf beliebig gewählte Punkte (von denen keine drei auf einer Geraden liegen) eine $C^{(3)}$ vollständig und eindeutig bestimmt, wenn man verlangt, einer derselben, $\mathfrak{A}$, soll der gemeinsame Tangentialpunkt für die vier übrigen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ sein; denn da diese als Berührungspunkte doppelt zu zählen sind, so werden im ganzen neun Punkte zur Bestimmung der $C^{(3)}$ gegeben sein. Durch diese neun Punkte gehen aber keine zwei verschiedenen Kurven dritter Ordnung (d. h. sie bilden nicht die Grundpunkte eines Kurvenbüschels), denn sonst müßten, da drei Punkte

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1$ auf einer Geraden liegen, die sechs übrigen $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_4$ auf einem Kegelschnitt liegen, was nicht der Fall ist, weil sich nicht drei Tangenten eines Kegelschnitts $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3|$, $|\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_4|$ in einem Punkte $\mathfrak{A}$ schneiden können. Man erzeugt diese Kurve $C^{(3)}$ dadurch, daß man das Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4]$ bildet und von $\mathfrak{A}$ die Polaren rücksichtlich aller Kegelschnitte des Büschels nimmt, welche ein Strahlenbüschel bilden, projektiv mit dem Kegelschnittbüschel; das Erzeugnis dieser beiden projektiven Gebilde ist die $C^{(3)}$.

4. Aus dem vorhin bemerkten Resultat (2.), daß die sechs Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{t}_4$$

auf einem Kegelschnitt liegen müssen und daraus, daß die drei übrigen Punkte

$$\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3$$

auf einer Geraden liegen, folgt, daß die neun Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_4,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_4$$

zusammen eine Gruppe von neun associierten Punkten bilden derart, daß jede Kurve dritter Ordnung, welche durch acht derselben geht, auch durch den neunten gehen muß; (§ 10, 2) also:

Ein Punkt $\mathfrak{a}_1$ der $C^{(3)}$, sein Tangentialpunkt $\mathfrak{A}$, die vier Berührungspunkte des Tangentenquadrupels aus $\mathfrak{a}_1$ und die drei Diagonalpunkte des von diesen vier Berührungspunkten gebildeten vollständigen Vierecks sind eine Gruppe von neun associierten Punkten.

Nimmt man nur die vier Punkte $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_4$ an und verlangt, daß sie Berührungspunkte eines Tangentenquadrupels sein sollen, dessen Ausgangspunkt **nicht** gegeben ist, dann ist die $C^{(3)}$ dadurch noch nicht bestimmt, sondern man kann im allgemeinen noch zwei Punkte von ihr, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$, willkürlich annehmen, weil außer den vier Punkten $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \mathfrak{t}_4$ noch die drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks

$$(\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2,\ \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4) = \mathfrak{a}_2,$$
$$(\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_4) = \mathfrak{a}_3,$$
$$(\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_4,\ \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3) = \mathfrak{a}_4$$

mit gegeben sind, also zusammen sieben Punkte, zu denen noch zwei willkürlich gewählte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ für die Bestimmung der Kurve hinzutreten dürfen. Nimmt man diese an, so gestaltet sich die Konstruktion folgendermaßen:

Der Kegelschnitt $[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4 \mathfrak{p}_1]$ liefert eine Tangente in $\mathfrak{p}_1$, der Kegelschnitt $[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4 \mathfrak{p}_2]$ eine Tangente in $\mathfrak{p}_2$; der Schnittpunkt beider Tangenten ist der gesuchte Punkt $\mathfrak{a}_1$, dessen Tangentenquadrupel die Berührungspunkte $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, $\mathfrak{t}_4$ hat, (3.) und die $C^{(3)}$ ist nun nach dem Obigen vollständig bestimmt.

Eine Ausnahme hiervon macht der Fall, wenn insbesondere $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ konjugierte Punkte sind rücksichtlich des Kegelschnittbüschels mit den vier Grundpunkten $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, $\mathfrak{t}_4$. In diesem Falle wird nämlich der Schnittpunkt $\mathfrak{a}_1$ unbestimmt, weil jene beiden Tangenten in $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ an den beiden vorigen Kegelschnitten in eine und dieselbe Gerade zusammenfallen, also ihr Schnittpunkt unbestimmt wird. Und in der That bilden dann alle dabei auftretenden $C^{(3)}$ ein Büschel von Kurven dritter Ordnung, wie wir eben gesehen haben; (ist $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{a}_1$, so wird $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{A}$). Wir schließen hieraus umgekehrt:

Alle Kurven dritter Ordnung, welche durch die vier Ecken eines vollständigen Vierecks $(\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4)$, seine drei Diagonalpunkte $(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4)$ und noch einen willkürlich zu wählenden achten Punkt $\mathfrak{p}_1$ hindurchgehen, gehen noch durch den zu $\mathfrak{p}_1$ rücksichtlich des Kegelschnittbüschels $[\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4]$ konjugierten Punkt $\mathfrak{p}_2$ und bilden ein Kurvenbüschel dritter Ordnung mit diesen neun Grundpunkten. Zwei besondere Kurven dieses Büschels erhält man, indem man $\mathfrak{p}_1$ zum gemeinschaftlichen Tangentialpunkt für $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4$ wählt, dann ist $\mathfrak{p}_2$ der gemeinschaftliche Tangentialpunkt für $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{p}_1$, oder indem man $\mathfrak{p}_2$ zum gemeinschaftlichen Tangentialpunkt für $\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 \mathfrak{t}_4$ wählt, dann wird $\mathfrak{p}_1$ der gemeinschaftliche Tangentialpunkt für $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{p}_2$.

§ 15. Drei Systeme von unendlich vielen Paaren konjugierter Punkte auf der $C^{(3)}$.

1. Geht aus einem Punkte $\mathfrak{A}$ der $C^{(3)}$ ein Tangentenquadrupel an dieselbe (§ 9, 6), dessen Berührungspunkte

$$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_4$$

seien, so lassen sich dieselben zu drei Paaren ordnen, indem durch die Wahl des einen Paares das andere mitbestimmt wird

I.	$\mathfrak{a}_1$	und	$\mathfrak{a}_2$,	$\mathfrak{a}_3$	und	$\mathfrak{a}_4$,
II.	$\mathfrak{a}_1$	„	$\mathfrak{a}_3$,	$\mathfrak{a}_2$	„	$\mathfrak{a}_4$,
III.	$\mathfrak{a}_1$	„	$\mathfrak{a}_4$,	$\mathfrak{a}_2$	„	$\mathfrak{a}_3$.

Jedes solches Paar kann, wie wir jetzt umgekehrt nachweisen wollen, als ein Paar konjugierter Punkte für die $C^{(3)}$ in dem früheren Sinne (§ 2) aufgefaßt werden, welcher den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildete; und durch ein solches Paar werden dann unendlich viele andere Paare konjugierter Punkte mitbestimmt, welche diejenigen Eigenschaften besitzen, die wir (§ 2 und § 3) von ihnen gefunden haben.

Da wir aber auf dreierlei Art (I. II. III.) solche Paare festlegen können, so erhalten wir nicht nur ein, sondern drei verschiedene Systeme von unendlich vielen Paaren konjugierter Punkte auf der $C^{(3)}$, und können eine und dieselbe Kurve $C^{(3)}$ aus dem ersten, zweiten oder dritten System heraus konstruieren.

Der Nachweis der Identität mit der Erzeugung in § 2 und § 3 braucht sich nur auf eines dieser drei Systeme zu erstrecken, weil er in gleicher Weise für die beiden übrigen geführt werden kann.

Nehmen wir daher im Systeme I. von den Berührungspunkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ des Tangentenquadrupels aus $\mathfrak{A}$ die Paare

$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{a}_3 \text{ und } \mathfrak{a}_4,$$

so wissen wir aus § 13, 2, daß der beliebig gewählte Punkt $\mathfrak{b}_1$ der $C^{(3)}$ mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ verbunden zwei Strahlen $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2|$ giebt, welche zum dritten Male in $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$

schneiden, und daß die Punkte $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ die Eigenschaft besitzen, denselben Tangentialpunkt $\mathfrak{C}$ zu haben. Derselbe kann dadurch gefunden werden, daß wir $\mathfrak{A}$ mit dem Tangentialpunkt $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{b}_1$ verbinden und den dritten Schnittpunkt $\mathfrak{C}$ von $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ mit der $C^{(3)}$ aufsuchen. Wir erhalten also aus dem einen Paare $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, indem wir $\mathfrak{b}_1$ verändern, unendlich viele andere Paare $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ auf der $C^{(3)}$, welche sämtlich die gleiche Eigenschaft wie $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ besitzen, nämlich denselben Tangentialpunkt zu haben.

Da aber in § 13, 5 nachgewiesen ist, daß die drei Strahlenpaare

$|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_3|$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}_4|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{c}_1|$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{c}_2|$

einer Strahleninvolution angehören, welche schon durch die beiden ersten Strahlenpaare vollständig bestimmt ist, so erkennen wir, daß der Punkt $\mathfrak{A}$ nach sämtlichen Punktepaaren $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, die aus dem ersten $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ abgeleitet werden, Strahlenpaare einer und derselben Strahleninvolution sendet, welche dem Punkte $\mathfrak{A}$ zugehört.

Nehmen wir drei solche Punktepaare $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}_2'$, $\mathfrak{c}_1''\mathfrak{c}_2''$ beliebig heraus, so erkennen wir, daß die $C^{(3)}$ als der Ort solcher Punkte $\mathfrak{A}$ erscheint, welche nach diesen drei Punktepaaren drei Strahlenpaare einer Involution sendet, und dadurch ist die Identität unserer $C^{(3)}$ mit derjenigen Erzeugungsweise, von welcher wir in § 3 ausgingen, nachgewiesen. Wir können demgemäß folgendes Resultat aussprechen:

Wenn man von zwei solchen Punkten $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ der $C^{(3)}$, welche denselben Tangentialpunkt haben und konjugierte Punkte heißen sollen, ausgeht, so wird durch dieselben ein ganzes System unendlich vieler Paare von konjugierten Punkten $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ in eindeutiger Weise festgelegt, indem man zu jedem neuen Paare dadurch gelangt, daß man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ der $C^{(3)}$ mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ verbindet und die dritten Schnittpunkte $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ aufsucht. Jeder Punkt $\mathfrak{A}$ der $C^{(3)}$ sendet nach allen Paaren konjugierter Punkte Strahlenpaare einer Involution.

Alle übrigen Eigenschaften, z. B. daß auch jedes abgeleitete Punktepaar mit einem neuen Kurvenpunkt verbunden, als dritte Schnittpunkte wieder ein Paar konjugierter Punkte liefert, daß die Strahleninvolutionen, welche selbst zwei konjugierten Punkten zugehören, in projektiver Beziehung und halb-perspektiver Lage sich befinden, daß man jedes beliebige Paar konjugierter Punkte zu Mittelpunkten der zugehörigen erzeugenden Strahleninvolutionen wählen kann u. s. w., ist schon in § 2 und § 3 ausgeführt und braucht nicht wiederholt zu werden, obwohl es sich auch von hier aus direkt ableiten läßt.

2. Neu aber tritt uns hier das Resultat entgegen, daß auf einer gegebenen $C^{(3)}$ drei verschiedene Systeme von Paaren konjugierter Punkte, die in einem gewissen Zusammenhange miteinander stehen, auftreten, daß also auch dieselbe Kurve $C^{(3)}$ auf drei wesentlich verschiedene Arten durch zwei Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halb-perspektiver Lage erzeugt werden kann.

Hat nämlich das Tangentenquadrupel aus $\mathfrak{A}$ die Berührungspunkte

$$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_4,$$

und seien die drei Diagonalpunkte dieses vollständigen Vierecks

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{A}',$$
$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{A}'',$$
$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = \mathfrak{A}''',$$

dann kann man entweder

I. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ als Mittelpunkte der erzeugenden Strahleninvolutionen wählen, wobei die nach

$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2,\quad \mathfrak{a}_3 \text{ und } \mathfrak{a}_4$$

hingehenden Strahlenpaare zur Bestimmung derselben dienen, in welchem Falle selbstverständlich die Strahleninvolution $[\mathfrak{A}']$ eine hyperbolische ist; oder

II. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}''$ als Mittelpunkte der erzeugenden Strahleninvolutionen, welche durch die Strahlenpaare nach

$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_3,\quad \mathfrak{a}_2 \text{ und } \mathfrak{a}_4$$

bestimmt werden; oder



III. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'''$ als Mittelpunkte der erzeugenden Strahleninvolutionen, welche durch die Strahlenpaare nach

$$\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_4, \quad \mathfrak{a}_2 \text{ und } \mathfrak{a}_3$$

bestimmt werden.

In allen drei Fällen ist die Strahleninvolution $[\mathfrak{A}']$, $[\mathfrak{A}'']$, $[\mathfrak{A}''']$ eine hyperbolische, während bekanntlich von den drei Strahleninvolutionen in $\mathfrak{A}$ zwei hyperbolisch sind und eine elliptisch ist. Dieselbe Kurve $C^{(3)}$ kann also zweimal durch zwei hyperbolische Strahleninvolutionen und einmal durch eine hyperbolische und eine elliptische Strahleninvolution erzeugt werden. Zwischen den drei verschiedenen Systemen von Paaren konjugierter Punkte auf der $C^{(3)}$ besteht ein gewisser Zusammenhang, über den folgende Betrachtung Auskunft giebt:

Ist $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ ein beliebiges Paar konjugierter Punkte mit dem gemeinsamen Tangentialpunkt $\mathfrak{T}$ in dem einen System, $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1'$ ein Paar konjugierter Punkte mit dem gemeinsamen Tangentialpunkt $\mathfrak{T}'$ in dem zweiten System, und möge die Gerade $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}'|$ der $C^{(3)}$ zum dritten Mal in $\mathfrak{P}''$, die Gerade $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1'|$ der $C^{(3)}$ zum dritten Mal in $\mathfrak{P}_1''$ begegnen, so müssen offenbar die Tangenten in $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ der $C^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ einer Geraden zum dritten Mal begegnen, ebenso die Tangenten in $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_1''$ in den Punkten $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ derselben Geraden. Der dritte Schnittpunkt $\mathfrak{T}''$ der Geraden $|\mathfrak{T}\mathfrak{T}'|$ ist also gemeinsamer Tangentialpunkt für $\mathfrak{P}''\mathfrak{P}_1''$, und diese sind daher ein Paar konjugierter Punkte in einem der drei Systeme. Sie können aber weder dem ersten System angehören, noch dem zweiten, müssen also dem dritten angehören. Denn gehörten $\mathfrak{P}''\mathfrak{P}_1''$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ demselben Systeme an, so müsste der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{P}''\mathfrak{P}, \ \mathfrak{P}_1''\mathfrak{P}_1)$$

auf der $C^{(3)}$ liegen, d. h. $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}_1'$ müssten zusammenfallen, was der Annahme gemäß nicht der Fall ist; also gilt der Satz:

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ ein Paar konjugierter Punkte in einem der drei Systeme, $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}_1'$ ein Paar konjugierter Punkte in dem zweiten System, so sind

die dritten Schnittpunkte $\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{P}_1''$ der Verbindungslinien $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}'|$ und $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1'|$ mit der $C^{(3)}$ ein Paar konjugierter Punkte in dem dritten System, und die drei Tangentialpunkte dieser drei Punktepaare liegen auf einer Geraden.

Aus zwei Paaren konjugierter Punkte zweier verschiedenen Systeme folgt also immer ein Paar konjugierter Punkte des dritten Systems.

Wir haben hierbei stillschweigend vorausgesetzt, daß das Tangentenquadrupel von einem Punkte $\mathfrak{A}$ der $C^{(3)}$ aus vier reellen Strahlen bestehe, also auch vier reelle Berührungspunkte habe.

Dies braucht indessen keineswegs für alle Punkte der $C^{(3)}$ der Fall zu sein, sondern die Tangenten können auch paarweise konjugiert-imaginär sein, also es können auch nur zwei oder keine der vier Tangenten reell sein. Dies ruft wesentliche Modifikationen der vorigen Untersuchungen hervor und führt auf die verschiedenen Gestalten, welche eine $C^{(3)}$ annehmen kann, sowie auf die Bedingungen für die Erzeugung der einen oder der andern Gestalt. Diese Untersuchung behalten wir uns für später vor (§ 18).

3. Welches der drei Systeme von konjugierten Punktepaaren auf der $C^{(3)}$ wir auch wählen mögen, in jedem derselben können wir noch die Mittelpunkte der beiden erzeugenden Strahleninvolutionen in ein beliebiges Paar konjugierter Punkte hineinverlegen und daher auf unendlich vielfache Weise die $C^{(3)}$ vermittelst zweier Strahleninvolutionen erzeugen. Solche zwei erzeugenden Strahleninvolutionen behalten nun für dasselbe System hinsichtlich ihres hyperbolischen oder elliptischen Charakters Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit bei, wie man auch ihre Mittelpunkte verändern mag.

In der That, ob eine Strahleninvolution hyperbolischer oder elliptischer Natur ist, läßt sich durch die Lage zweier beliebigen Strahlenpaare

$$x \text{ und } x_1, \quad y \text{ und } y_1$$

bekanntlich so entscheiden, daß man den Wert des Doppelverhältnisses



$$(x x_1 y y_1)$$

betrachtet; ist dasselbe positiv, so wird kein Elementenpaar durch das andere getrennt, also ist die Involution hyperbolisch; ist das Doppelverhältnis dagegen negativ, so wird jedes der beiden Elementenpaare durch das andere getrennt, also ist die Involution elliptisch. Dieses konstante Vorzeichen des Doppelverhältnisses bleibt erhalten, welche zwei Elementenpaare man auch herausnehmen mag, da sie durch zwei Elementenpaare gerade bestimmt wird und natürlich ihren Charakter nicht ändern kann bei anderer Annahme von Elementenpaaren.

Nehmen wir drei zur Bestimmung der $C^{(3)}$ notwendige und hinreichende Paare von konjugierten Punkten (§ 2)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

willkürlich und unabhängig voneinander an, dann gilt für die fünf beliebigen Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$ die Identität zwischen den Doppelverhältnissen (§ 2, 7)

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) \,.\, \mathfrak{B}(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}) \,.\, \mathfrak{B}_1(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 1,$$

und ebenso zwischen den fünf beliebigen Punkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$ die Identität

$$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) \,.\, \mathfrak{B}(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1) \,.\, \mathfrak{B}_1(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}) = 1,$$

woraus durch Division folgt

$$\frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1)}{\mathfrak{A}_1(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1)} = \frac{\mathfrak{B}\,(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)}{\mathfrak{B}_1(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)}$$

und in gleicher Weise würde sich auch die Identität ergeben

$$\frac{\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1)}{\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1)} = \frac{\mathfrak{C}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)}{\mathfrak{C}_1(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)};$$

diese Relationen zeigen aber, daß wenn die beiden den konjugierten Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zugehörigen Strahleninvolutionen gleichartig sind, d. h. entweder beide hyperbolisch oder beide elliptisch, auch die den beiden konjugierten Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ und ebenso die den beiden konjugierten Punkten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ zugehörigen Strahleninvolutionen gleichartig sein müssen; dagegen wenn die den beiden konjugierten Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zugehörigen Strahleninvolutionen ungleichartig

sind, d. h. eine hyperbolisch und die andere elliptisch, dies auch bei den beiden, den Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$, sowie den Punkten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ zugehörigen Strahleninvolutionen der Fall sein muß.

An Stelle des Paares $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ können wir aber ein beliebiges anderes Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ (desselben Systems) setzen, ohne daß die Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$ und $[\mathfrak{A}_1]$ dadurch geändert werden, also gilt für jedes beliebige Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ dasselbe, was für irgend ein Paar konjugierter Punkte desselben Systems gilt. Wir schließen daher den Satz:

Wenn für irgend ein Paar konjugierter Punkte einer $C^{(3)}$ die zugehörigen Strahleninvolutionen gleichartig sind (d. h. entweder beide hyperbolisch oder beide elliptisch), so sind sie für sämtliche Paare konjugierter Punkte gleichartig; wenn dagegen für irgend ein Paar konjugierter Punkte (desselben Systems) einer $C^{(3)}$ die zugehörigen Strahleninvolutionen ungleichartig sind (d. h. eine elliptisch und die andere hyperbolisch), so ist dies auch bei sämtlichen übrigen Paaren konjugierter Punkte der Fall.

4. Nun ist die eine Möglichkeit, nämlich daß die den sämtlichen Punkten einer $C^{(3)}$ zugehörigen Strahleninvolutionen alle elliptisch seien, von vornherein ausgeschlossen, sondern es giebt immer auf der $C^{(3)}$ solche Punkte, deren zugehörige Strahleninvolutionen hyperbolisch sein müssen; denn wären $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ ein Paar konjugierter Punkte, so schneidet die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ die $C^{(3)}$ notwendig noch in einem dritten Punkte, für den die zugehörige Strahleninvolution eine hyperbolische ist, weil für ihn $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ ein Doppelstrahl wird; und dies gilt für jeden Verbindungsstrahl zweier konjugierten Punkte. Der erste Fall teilt sich demnach in zwei Teile, und es können überhaupt nur drei Fälle eintreten, nämlich:

α) Die den sämtlichen Paaren konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ zugehörigen Strahleninvolutionen sind gleichartig und allemal beide hyperbolisch;

β) die den sämtlichen Paaren konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ zugehörigen Strahleninvolutionen sind gleichartig, aber für einen Teil derselben sind beide hyperbolisch, für den übrigen Teil von Paaren sind beide elliptisch;

γ) die jedem Paare konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ zugehörigen Strahleninvolutionen sind immer ungleichartig, d. h. eine hyperbolisch und die andere elliptisch.

Wir wollen diese drei Fälle nach dem Vorschlage Reye's (Geometrie der Lage, 3. Auflage, S. 244) bezeichnen als α) den hyperbolischen, β) den elliptischen und γ) den dualen Fall.

Daß der erste (hyperbolische) Fall wirklich eintreten kann, erkennen wir aus der Erzeugung der $C^{(3)}$ vermittelst einer Kegelschnittschar und eines Punktepaares $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ (§ 3, 4). Nehmen wir nämlich eine Kegelschnittschar mit vier gemeinschaftlichen imaginären Tangenten an, so besitzt dieselbe bekanntlich die Eigenschaft, daß die Tangentenpaare aus jedem Punkte der Ebene an dieselbe eine hyperbolische Strahleninvolution bilden, folglich auch aus allen Punkten der $C^{(3)}$. Punkte mit zugehörigen elliptischen Strahleninvolutionen giebt es also überhaupt nicht.

5. Den Nachweis für die eben ausgesprochene Behauptung wollen wir der kürzeren Aussprache wegen auf dem dual gegenüberstehenden Gebiete führen, d. h. den Satz beweisen:

„Jede Gerade wird von einem Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten in einer hyperbolischen Punktinvolution geschnitten.“

In einem Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten giebt es nämlich immer ein reelles Linienpaar bc (ausgearteter Kegelschnitt des Büschels), die Träger zweier elliptischen Punktinvolutionen, die sämtlichen Kegelschnitten des Büschels zugehören, d. h. aus Paaren konjugierter Punkte rücksichtlich sämtlicher Kegelschnitte des Büschels bestehen.

Schneidet nun eine beliebige Gerade g die Träger dieser beiden Punktinvolutionen in den Punkten

$$(gb) = \mathfrak{b}, \quad (gc) = \mathfrak{c},$$

und sind die konjugierten Punkte derselben in den beiden Involutionen bez.

$$\mathfrak{b}_1 \text{ und } \mathfrak{c}_1,$$

ihre Verbindungslinie

$$|\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1| = g_1,$$

ist ferner in dem Schnittpunkt der Träger ein Punkt der einen mit einem der andern vereinigt

$$(bc) = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}_1,$$

deren konjugierte Punkte für beide Involutionen bez.

$$\mathfrak{B}_1 \text{ und } \mathfrak{C}$$

seien, und heißt endlich die Verbindungslinie

$$|\mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}| = a,$$

dann wird diejenige Punktinvolution, welche das Kegelschnittbüschel auf der Geraden g ausschneidet, durch die beiden Punktepaare bestimmt

$$(gb) \text{ und } (gc), \quad (ga) \text{ und } (gg_1). \quad \text{[Th. d. K. S. 257.]}$$

Von den fünf Geraden in der Ebene a, b, c, g, g_1 wird nun jede durch die vier übrigen in vier Punkten geschnitten, die einen bestimmten Wert des Doppelverhältnisses darbieten, und zwischen den dadurch erhaltenen Doppelverhältnissen gilt die bekannte Möbiussche Relation

$$g(ag_1bc) \,.\, b(ag_1cg) \,.\, c(ag_1gb) = 1$$

(§ 2, 7), welche sich in die Form bringen läßt

$$g(bcag_1) = \frac{1 - c(abg_1g)}{1 - b(acg_1g)}.$$

Wenn nun die beiden Punktinvolutionen auf b und c elliptisch sind, so sind die Werte der beiden Doppelverhältnisse

$$c(abg_1g) \text{ und } b(acg_1g)$$

beide negativ, folglich $g(bcag_1)$ positiv, d. h. die auf g ausgeschnittene Involution ist hyperbolisch w. z. b. w.

In gleicher Weise können wir zeigen, daß bei Veränderung von g, wodurch sich auch g_1 verändert, das Linienpaar gg_1 auf der Geraden a Punktepaare einer und derselben

festen Involution ausschneidet; denn sei ein beliebiges zweites Geradenpaar der vorigen Art $g'g_1'$, so ist identisch

$$a(bcgg') \cdot b(cagg') \cdot c(abgg') = 1,$$
$$a(cbg_1g_1')\; b(acg_1g_1')\; c(bag_1g_1') = 1,$$

wenn daher wegen der Involution auf b

$$b(cagg') = b(acg_1g_1')$$

und wegen der Involution auf c

$$c(abgg') = c(bag_1g_1')$$

ist, so folgt auch

$$a(bcgg') = a_1(cbg_1g_1'),$$

folglich beschreiben die Punkte (ag) und (ag_1) auf dem Träger a eine Punktinvolution. Aus dem Zusammenhange dieser drei Punktinvolutionen auf den festen Trägern abc, welcher durch die Beziehung gegeben ist

$$a(bcgg_1) \cdot b(cagg_1) \cdot c(abgg_1) = 1$$

folgt auch, daß die Involution auf a hyperbolisch sein muß, wenn die beiden Involutionen auf b und c elliptisch sind, und überhaupt von den drei Involutionen immer zwei elliptisch und eine hyperbolisch, oder alle drei hyperbolisch sein müssen (Th. d. K. S. 254).

6. Kehren wir nach dieser Abschweifung zu der Betrachtung in 4. zurück, so wissen wir hinsichtlich des hyperbolischen oder elliptischen Charakters zweier erzeugender Strahleninvolutionen einer $C^{(3)}$, daß die Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit desselben zwar erhalten bleibt für dasselbe System konjugierter Punkte der $C^{(3)}$, daß aber dabei drei Fälle, der hyperbolische, der elliptische und der duale auftreten können. Dies führt zwar nicht zu wesentlich verschiedenen Gattungen der $C^{(3)}$, sondern z. B. bei derselben $C^{(3)}$ kann sowohl der elliptische, als auch der duale Fall auftreten, und wir werden erst später die verschiedenen Gattungen der $C^{(3)}$ und die Bedingungen für ihre Erzeugung kennen lernen, allein mit der Kurve $C^{(3)}$ hängt eine bestimmte Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ eng zusammen (§ 6), welche ebenso durch Paare von Punktinvolutionen erzeugt wird, wie die

$C^{(3)}$ durch Paare von Strahleninvolutionen. Der hyperbolische, elliptische oder duale Charakter für die $C^{(3)}$ steht mit dem für die $\mathfrak{K}^{(3)}$ in einem Zusammenhange, welchen wir jetzt untersuchen wollen.

Halten wir eines der drei Systeme konjugierter Punkte auf der $C^{(3)}$ fest, so sendet ein beliebiger Punkt derselben nach sämtlichen Paaren konjugierter Punkte Strahlenpaare einer bestimmten ihm zugehörigen Strahleninvolution; zu zwei konjugierten Punkten selbst gehören zwei bestimmte Strahleninvolutionen, die entweder gleichartigen oder ungleichartigen Charakters sind. Die Verbindungsstrahlen aller Paare konjugierter Punkte umhüllen eine bestimmte $\mathfrak{K}^{(3)}$, und zwar ist eine solche Verbindungslinie der eine Doppelstrahl einer jener Strahleninvolutionen, dem sich der zweite zugesellt, so daß der Schnittpunkt beider ein Punkt der $C^{(3)}$ wird (nämlich der dritte Schnittpunkt jener ersten Verbindungslinie und der $C^{(3)}$). Wir können also auch sagen: die $\mathfrak{K}^{(3)}$ wird umhüllt von sämtlichen Doppelstrahlen der vorigen Strahleninvolutionen. Die Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ ordnen sich auf diese Weise selbst zu Paaren konjugierter Tangenten, und jede beliebige Tangente wird von diesen sämtlichen Paaren konjugierter Tangenten in Punktepaaren einer Punktinvolution geschnitten; die Doppelpunkte dieser Punktinvolution erfüllen dann wiederum die $C^{(3)}$ und bilden die Paare konjugierter Punkte derselben. Dadurch wird der Kreis der Betrachtung geschlossen. Der früher gefundene Zusammenhang zwischen den Paaren konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ und Paaren konjugierter Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist aber der, daß immer das eine Paar durch das andere harmonisch getrennt wird (§ 7, 2).

Wenn nun bei der $C^{(3)}$ der hyperbolische, elliptische oder duale Fall eintritt, so wird auch in bestimmter Weise einer dieser drei Fälle bei der $\mathfrak{K}^{(3)}$ eintreten, hinsichtlich der Paare erzeugender Involutionen.

7. Gehen wir von drei zur Bestimmung der $C^{(3)}$ notwendigen und hinreichenden, voneinander unabhängigen Paaren konjugierter Punkte

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

aus, so erhalten wir aus ihnen drei Strahleninvolutionen, durch je zwei Strahlenpaare bestimmt, die wir in abkürzender aber nicht mißzuverstehender Weise so bezeichnen können

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1], \quad \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1], \quad \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1],$$
$$\mathfrak{A}_1[\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1], \quad \mathfrak{B}_1[\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1], \quad \mathfrak{C}_1[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1];$$

die drei Paare (reeller oder konjugiert-imaginärer) Doppelstrahlen der drei Strahleninvolutionen $[\mathfrak{A}]$, $[\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{C}]$ seien

$$aa_1, \ bb_1, \ cc_1$$

und können als drei Paare konjugierter Strahlen zur Bestimmung der $\mathfrak{K}^{(3)}$ gewählt werden. Fassen wir nun die drei Punktepaare

$$\mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{C}_1$$

als drei ausgeartete Kegelschnitte auf, so bestimmen je zwei derselben eine Kegelschnittschar; aus diesen drei Scharen leiten wir durch Vereinigung von je zwei Kegelschnitten neue Scharen ab u. s. f., von denen die Gesamtheit des ganzen Kegelschnittgewebes erfüllt wird (§ 5).

Fassen wir andererseits die drei Linienpaare

$$a \text{ und } a_1, \quad b \text{ und } b_1, \quad c \text{ und } c_1$$

als drei ausgeartete Kegelschnitte auf, so bestimmen je zwei derselben ein Kegelschnittbüschel, und aus diesen drei Büscheln leiten wir durch Vereinigung von je zwei Kegelschnitten neue Büschel ab u. s. f. Die Gesamtheit aller dieser Kegelschnitte erfüllt das Kegelschnittnetz. Eine der einfachsten Erzeugungsweisen für die $C^{(3)}$ war nun die, daß wir aus dem Kegelschnittgewebe eine beliebige Kegelschnittschar herausnahmen, aus einem beliebigen Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ an jeden Kegelschnitt der Schar die Tangentenpaare legten und zum Durchschnitt brachten; die vier Durchschnittspunkte erfüllen dann die ganze $C^{(3)}$ (§ 3, 4). Andererseits nehmen wir ein beliebiges Kegelschnittbüschel aus dem Netze heraus und lassen ein Paar konjugierter Strahlen aa_1 (einen ausgearteten Kegelschnitt des Netzes)

von jedem Kegelschnitte des Büschels in zwei Punktepaaren durchschneiden; die vier Verbindungslinien der Durchschnittspunkte umhüllen dann die ganze Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$.

Ueber den hyperbolischen, elliptischen oder dualen Charakter, welchen die $C^{(3)}$ darbietet, entscheidet dann der Charakter der Strahleninvolutionen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, und über den hyperbolischen, elliptischen oder dualen Charakter der $\mathfrak{K}^{(3)}$ ebenso der Charakter der beiden Punktinvolutionen auf a und a_1. Da wir aus 5. wissen, daß jedes Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten eine beliebige Gerade in Punktepaaren einer hyperbolischen Punktinvolution schneidet, und andererseits an jede Kegelschnittschar mit vier imaginären gemeinschaftlichen Tangenten ein beliebiger Punkt der Ebene Tangentenpaare sendet, die eine hyperbolische Strahleninvolution bilden, so folgt z. B. daß, wenn unter sämtlichen Kegelschnittscharen des Gewebes eine einzige vorkommt, die vier imaginäre gemeinschaftliche Tangenten besitzt, dann die zugehörige $C^{(3)}$ notwendig hyperbolischen Charakters sein muß, und, wenn unter sämtlichen Kegelschnittbüscheln des Netzes ein einziges vorkommt, dessen vier Grundpunkte imaginär sind, dann notwendig die zugehörige $\mathfrak{K}^{(3)}$ hyperbolischen Charakters sein muß.

8. Betrachten wir nun den einen der beiden dual gegenüberstehenden Fälle, ein Kegelschnittbüschel, so enthält dasselbe bekanntlich im allgemeinen drei Linienpaare (ausgeartete Kegelschnitte); diese sind entweder alle drei reell, oder nur eines von ihnen ist reell und die beiden andern sind konjugiert-imaginär; die Schnittpunkte (Doppelpunkte) dieser imaginären Linienpaare sind entweder beide reell, oder keiner von beiden, aber ihre Verbindungslinie, auf welcher sie durch eine elliptische Punktinvolution vertreten werden. Der erste Fall kann nur eintreten, wenn die Grundpunkte des Büschels alle vier reell sind. Der zweite Fall, daß zwei Linienpaare reelle Schnittpunkte (Doppelpunkte) haben, aber selbst konjugiert-imaginär sind, tritt nur ein, wenn die Grundpunkte des Büschels alle vier imaginär sind. Der dritte Fall, daß von den beiden imaginären

Linienpaaren auch die beiden Schnittpunkte (Doppelpunkte) konjugiert-imaginär sind, aber auf einer reellen Geraden durch eine elliptische Punktinvolution vertreten werden, tritt nur ein, wenn von den vier Grundpunkten zwei reell und zwei konjugiert-imaginär sind, deren Verbindungsstrahlen das eine allein reelle Linienpaar des Büschels bilden (Th. d. K. S. 364).

Das Analoge gilt für die Kegelschnittschar.

Nehmen wir nun an, daß auf einer $C^{(3)}$ zwei konjugierte Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ mit zugehörigen elliptischen Strahleninvolutionen vorhanden sind, also die $C^{(3)}$ elliptischen Charakters ist, dann müssen die konjugiert-imaginären Doppelstrahlen dieser beiden elliptischen Strahleninvolutionen sich in vier imaginären Punkten durchschneiden, die auf einem (reellen und in bekannter Weise konstruierbaren) Linienpaar liegen und durch zwei (ebenfalls reell konstruierbare) elliptische Punktinvolutionen vertreten werden. Die vier imaginären Durchschnittspunkte sind aber die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels, welches dem Netze angehört, aus dem die $\mathfrak{K}^{(3)}$ hervorgeht; also muß diese nach der obigen Bemerkung hyperbolischen Charakters sein. Wir schließen hieraus den Doppelsatz:

Wenn eine $C^{(3)}$ elliptischen Charakters ist, so muß die zugehörige $\mathfrak{K}^{(3)}$ hyperbolischen Charakters sein.

Wenn eine $\mathfrak{K}^{(3)}$ elliptischen Charakters ist, so muß die zugehörige $C^{(3)}$ hyperbolischen Charakters sein.

Dasselbe gilt auch, wenn von den beiden den konjugierten Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zugehörigen Strahleninvolutionen nur eine elliptisch und die andere hyperbolisch, also die $C^{(3)}$ dualen Charakters ist. Denn die beiden Linienpaare, gebildet von den Doppelstrahlen der Strahleninvolutionen, schneiden sich, da nur eines reell ist, in vier imaginären Punkten, die durch zwei elliptische Punktinvolutionen auf den beiden reellen Doppelstrahlen vertreten werden und reell konstruiert werden können. Die vier imaginären Schnittpunkte dieser beiden Linienpaare sind die Grundpunkte

eines Kegelschnittbüschels, welches dem Netze angehört, aus dem die $\mathfrak{K}^{(3)}$ hervorgeht, also muß diese hyperbolischen Charakters sein. Wir schließen hieraus den Doppelsatz:

Wenn eine $C^{(3)}$ dualen Charakters ist, so muß die zugehörige $\mathfrak{K}^{(3)}$ hyperbolischen Charakters sein.

Wenn eine $\mathfrak{K}^{(3)}$ dualen Charakters ist, so muß die zugehörige $C^{(3)}$ hyperbolischen Charakters sein.

Aus den vorigen beiden Doppelsätzen schließen wir durch Umkehrung:

Wenn eine $C^{(3)}$ hyperbolischen Charakters ist, so muß die zugehörige $\mathfrak{K}^{(3)}$ entweder dualen oder elliptischen Charakters sein, und zwar dualen Charakters, sobald auf den beiden Doppelstrahlen irgend einer der erzeugenden Strahleninvolutionen die durch sämtliche Doppelstrahlenpaare ausgeschnittenen Punktinvolutionen ungleichartig sind, dagegen elliptischen Charakters, sobald sie gleichartig sind.

Wenn eine $\mathfrak{K}^{(3)}$ hyper bolischen Charakters ist so muß die zugehörige $C^{(3)}$ entweder dualen oder elliptischen Charakters sein, und zwar dualen Charakters, sobald die beiden Doppelpunkte irgend einer der erzeugenden Punktinvolutionen nach allen übrigen Doppelpunktpaaren zwei ungleichartige Strahleninvolutionen senden, dagegen elliptischen Charakters, sobald solche zwei Strahleninvolutionen gleichartig sind.

Daß niemals zu einer $C^{(3)}$ hyperbolischen Charakters wieder eine $\mathfrak{K}^{(3)}$ hyperbolischen Charakters zugehören kann und umgekehrt, folgt daraus, daß bei einer $C^{(3)}$ hyperbolischen Charakters unter den Paaren konjugierter Punkte auch immer imaginäre Punkte auf reellem Träger vorkommen müssen. Der directe Nachweis für diese Behauptung erfordert aber eine eingehendere Untersuchung, zu der wir in den nächsten Paragraphen übergehen wollen (§ 16—20).

§ 16. Allgemeine Untersuchung der verschiedenen Gestalten, welche eine $C^{(3)}$ annehmen kann.

1. Die verschiedenen Erzeugungsweisen der $C^{(3)}$, welche wir kennen gelernt haben, liefern immer einen geometrischen Ort von (einfach) unendlich vielen Punkten, welche kontinuierlich aufeinander folgend die gesamte $C^{(3)}$ erfüllen; diese besitzt die Eigenschaft, daß aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ derselben entweder keine, oder zwei oder vier reelle Tangenten an die Kurve gehen (§ 9, 6), außer der Tangente in $\mathfrak{O}$ selbst. Jede Gerade begegnet der $C^{(3)}$ im allgemeinen in drei Punkten, von denen einer immer reell sein muß, die beiden andern auch konjugiert-imaginär sein können.

Gehen wir nun von einem beliebigen endlichen Punkt $\mathfrak{O}$ der Kurve aus (der kein Wendepunkt ist) und drehen um $\mathfrak{O}$ einen Strahl s in der ganzen Ebene herum (um 180^0, oder als Halbstrahl um 360^0), so wird dieser Strahl s der $C^{(3)}$ außer in $\mathfrak{O}$ noch in zwei weiteren Punkten $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ begegnen, welche entweder beide reell sind und getrennt voneinander liegen, oder in einen Punkt zusammenfallen (welcher dann ein Berührungspunkt wird) oder endlich konjugiert-imaginär sein können. Der mittlere Fall wird den Übergang bilden vom ersten zum dritten und umgekehrt bei kontinuierlichem Verlauf der $C^{(3)}$ (ohne Doppelpunkt).

Denken wir uns die vollständige Drehung des Strahles s um den Punkt $\mathfrak{O}$ vollzogen, so daß die Punkte von s nach und nach sämtliche Punkte der Ebene erreichen, so wird die Annahme, daß für alle Lagen von s die beiden Punkte $\mathfrak{s}\mathfrak{s}'$ immer konjugiert-imaginär seien, unzulässig sein, weil dann die ganze $C^{(3)}$ nur den einzigen reellen Punkt $\mathfrak{O}$ haben würde, was gegen die Voraussetzung unserer Erzeugungsweisen ist. Insbesondere wird schon die Tangente in $\mathfrak{O}$ noch in einem dritten Punkte $\mathfrak{O}_1$ der $C^{(3)}$ begegnen, dem Tangentialpunkt von $\mathfrak{O}$. Es bleiben also nur zwei Möglichkeiten:

α) Entweder schneidet der um $\mathfrak{O}$ vollständig herumgedrehte Strahl s die $C^{(3)}$ immer in zwei reellen getrennt liegenden weiteren Punkten $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$, oder:

β) Der Strahl s schneidet für gewisse Gebiete seiner um $\mathfrak{O}$ vollzogenen Drehung in zwei reellen Punkten $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$, für andere Gebiete in zwei konjugiert-imaginären Punkten, und der Übergang von dem einen zum andern Fall findet statt beim Zusammenfallen der Punkte $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$, d. h. der veränderliche Strahl s wird Tangente aus $\mathfrak{O}$ an die $C^{(3)}$, gehört dem Tangentenquadrupel aus $\mathfrak{O}$ an. Daß in der That bei der Drehung des Strahles s um $\mathfrak{O}$ solche Lagen eintreten müssen, in welchen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ reell und getrennt voneinander sind, geht auch daraus hervor, daß die Verbindungslinie von $\mathfrak{O}$ mit irgend einem andern Punkte $\mathfrak{S}$ der $C^{(3)}$ notwendig noch in einem dritten reellen Punkte $\mathfrak{S}'$ der $C^{(3)}$ begegnen muß, der unter Umständen auch mit $\mathfrak{S}$ zusammenfallen kann.

2. Fassen wir nun zunächst den ersten Fall ins Auge, in welchem die Punkte $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ immer reell und voneinander getrennt sind, so wird keine Tangente des von $\mathfrak{O}$ ausgehenden Quadrupels reell sein können, weil sonst für diese zwei Punkte $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zusammenfielen (was gegen die Annahme ist), und bei weiterer Drehung müßte der Fall zweier konjugiert-imaginärer Punkte $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$ eintreten, was ebenfalls gegen die Annahme ist.

Für die Tangente in $\mathfrak{O}$ fällt einer der beiden Punkte $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$ nach $\mathfrak{O}$ selbst, der andere $\mathfrak{S}'$ ist der Tangentialpunkt $\mathfrak{O}_1$ zu $\mathfrak{O}$.

In diesem ersten Falle muß daher die $C^{(3)}$ aus zwei voneinander getrennten und in sich zusammenhängenden Zügen bestehen, deren einen der Punkt $\mathfrak{S}$ und den andern der Punkt $\mathfrak{S}'$ durchläuft. Der eine der beiden Züge geht durch $\mathfrak{O}$; wir wollen diesen als von $\mathfrak{S}$ beschrieben annehmen und den paaren Zug oder das Oval nennen, weil jeder Strahl s ihn in zwei Punkten, nämlich in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{S}$, trifft; den andern von $\mathfrak{S}'$ beschriebenen Zug wollen wir den unpaaren Zug oder die Serpentine nennen, weil jeder Strahl s ihn nur in einem reellen Punkte trifft. Er enthält notwendig den Tangentialpunkt $\mathfrak{O}_1$ zu $\mathfrak{O}$.

Wir können in unserm Fall auch sagen: Jede Gerade s, welche durch einen Punkt des paaren Zuges einer zweizügigen $C^{(3)}$ hindurchgeht, muß noch in zwei andern reellen Punkten der $C^{(3)}$ begegnen, von denen der eine auf dem paaren, der andere auf dem unpaaren Zuge der Kurve liegt.

Aus dem Punkte $\mathfrak{O}_1$, dem Tangentialpunkt zu $\mathfrak{O}$, geht die reelle Tangente $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}|$ an die Kurve, folglich notwendig noch eine zweite reelle Tangente; die übrigen beiden Tangenten aus $\mathfrak{O}_1$ könnten reell oder auch konjugiert-imaginär sein; daß letzeres nicht der Fall ist, geht aus dem Folgenden hervor (5.).

3. Wenn auf dem um $\mathfrak{O}$ gedrehten Strahl s sowohl reelle als auch konjugiert-imaginäre Punkte $\mathfrak{s}\mathfrak{s}'$ für verschiedene Lagen von s vorkommen, so muß es Übergangsfälle zwischen zwei solchen Gebieten bei der Drehung von s geben, d. h. es muß vorkommen, daß $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ zusammenfallen, also aus $\mathfrak{O}$ eine reelle Tangente an die $C^{(3)}$ geht, mithin also mindestens noch eine zweite reelle Tangente; die beiden übrigen können reell oder auch konjugiert-imaginär sein. Wir wollen die erstere Annahme an dritter Stelle behandeln und jetzt annehmen, daß aus $\mathfrak{O}$ nur zwei reelle Tangenten

$$t_1 \text{ und } t_2$$

an die $C^{(3)}$ gehen (die übrigen beiden Tangenten aber konjugiert-imaginär seien).

In diesem Falle teilen die beiden reellen Tangenten den ganzen Raum der Ebene in vier Gebiete, zwei Scheitelräume und die beiden Nebenscheitelräume. Das eine Paar Scheitelräume enthält sämtliche Punktepaare $\mathfrak{s}\mathfrak{s}'$, die auf einem durch $\mathfrak{O}$ gehenden Strahle s getrennt voneinander liegen; das andere Paar Scheitelräume enthält überhaupt keinen reellen Punkt der Kurve weiter. In dem ersten Paar Scheitelräume muß also die ganze $C^{(3)}$ verlaufen und einen zusammenhängenden Zug bilden; wir nennen sie eine einzügige $C^{(3)}$ oder Serpentine. Sie hängt im Unendlichen zusammen, wie die Hyperbel, kann auch durch ihre unendlich entfernten Punkte in mehrere Zweige zer-

fallen, die miteinander wie die Hyperbel zusammenhängen; über diesen Zusammenhang in den unendlich entfernten Punkten werden wir noch später eine Überlegung anstellen. Vorläufig tritt uns diese $C^{(3)}$ im Gegensatz zur vorigen als eine einzügige entgegen, die durch den Punkt $\mathfrak{D}$ selbst hindurchgeht (sobald nämlich $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{D}$ fällt, geht $\mathfrak{S}'$ nach $\mathfrak{D}_1$) und die charakteristische Eigenschaft besitzt, daß dieser eine Zug ein unpaarer Zug ist, d. h. eine Gerade s ihm nur entweder in drei oder in einem reellen Punkte ($\mathfrak{D}$) begegnen kann.

4. Es bleibt uns jetzt nur noch der dritte Fall übrig, nämlich die Annahme, daß von dem Punkte $\mathfrak{D}$ der Kurve vier reelle Tangenten

$$t_1, \ t_2, \ t_3, \ t_4$$

an dieselbe gehen.

In diesem Falle muß der Strahl s bei seiner Drehung um $\mathfrak{D}$ jedesmal beim Durchgange durch jeden dieser vier Strahlen aus einem Gebiete, in welchem seine beiden übrigen Schnittpunkte $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$ reell sind, in ein solches übergehen, in welchem diese Punkte $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$ konjugiert-imaginär sind. Bezeichnen wir nun die vier Tangenten aus $\mathfrak{D}$ in der Reihenfolge, daß bei der Drehung des Strahles s zuerst t_1, dann t_2, darauf t_3 und endlich t_4 erreicht wird, bis s wieder in die Lage von t_1 zurückkehrt, und machen wir die zulässige Annahme, daß bei der Drehung der Strahl s in den beiden Scheitelräumen zwischen t_1 und t_2 nur reelle Schnittpunkte $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$ habe, so wird man in den beiden Scheitelräumen zwischen t_2 und t_3 nur konjugiert-imaginäre, zwischen t_3 und t_4 wieder nur reelle und endlich zwischen t_4 und t_1 wieder nur konjugiert-imaginäre Schnittpunkte $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$ haben. Wir erhalten demgemäß zwei Paar Scheitelräume, in welchen nur reelle Punkte der $C^{(3)}$ sich befinden, in welchen also die ganze Kurve verläuft, und dazwischen liegend zwei Paar Scheitelräume, die keinen reellen Punkt der $C^{(3)}$ enthalten. Da diese Scheitelräume nichts miteinander gemein haben, als den Punkt $\mathfrak{D}$, so muß die Kurve $C^{(3)}$ eine zweizügige sein, wie im ersten Falle (2.). Der eine Zug verläuft ganz in einem Paar der

betreffenden Scheitelräume und geht durch den Punkt $\mathfrak{O}$ selbst hindurch; auf ihm liegt auch der Tangentialpunkt $\mathfrak{O}_1$; wir wollen ihn den unpaaren Zug nennen, weil jeder Strahl s, welcher in diese betreffenden Scheitelräume hineinfällt, der $C^{(3)}$ in drei reellen Punkten begegnet. Der andere Zug geht nicht durch $\mathfrak{O}$, weil die $C^{(3)}$ keinen Doppelpunkt hat; wir wollen ihn den paaren Zug nennen, weil jede Gerade s ihm in zwei reellen Punkten begegnet, sobald sie in die betreffenden beiden Scheitelräume hineinfällt, zwischen denen er liegt, während der dritte Schnittpunkt $\mathfrak{O}$ auf dem andern Zuge liegt. Jede andere Gerade s durch $\mathfrak{O}$, welche in einen der übrigen vier Scheitelräume hineinfällt, die keinen Punkt der $C^{(3)}$ enthalten, begegnet der $C^{(3)}$ außer in dem reellen Punkte $\mathfrak{O}$ nur noch in zwei konjugiert-imaginären Punkten $\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'$.

5. Wir haben hierdurch alle Möglichkeiten erschöpft und nur drei Fälle I., II., III. zu unterscheiden gehabt; in den Fällen I. und III. ist die $C^{(3)}$ eine zweizügige, in dem Falle II. eine einzügige. Die Fälle I. und III. decken sich aber, wie wir sogleich sehen werden, so daß nur zwei wesentlich verschiedene Gestalten der $C^{(3)}$ hervorgehen. Wir wissen zunächst, daß wenn eine $C^{(3)}$ einen Punkt $\mathfrak{O}$ besitzt, aus welchem keine oder vier reelle Tangenten an dieselbe gehen (I. und III.), dieselbe eine zweizügige sein muß; dagegen wenn sie einen Punkt $\mathfrak{O}$ besitzt, aus welchem nur zwei reelle Tangenten an dieselbe gehen (II.), so muß die $C^{(3)}$ eine einzügige sein. Hieraus folgt in dem Falle I., weil die $C^{(3)}$ eine zweizügige ist und aus dem Tangentialpunkt $\mathfrak{O}_1$ des Punktes $\mathfrak{O}$ mindestens zwei reelle Tangenten an dieselbe gehen, daß notwendig alle vier Tangenten aus $\mathfrak{O}_1$ an die $C^{(3)}$ reell sein müssen, denn sonst könnte sie nur eine einzügige sein.

Die Fälle I. und III. unterscheiden sich nur dadurch voneinander, daß bei I. der Punkt $\mathfrak{O}$ auf dem paaren, bei III. der Punkt $\mathfrak{O}$ auf dem unpaaren Zuge der $C^{(3)}$ liegt.

Nehmen wir nun im Falle I. auf dem durch $\mathfrak{O}$ gehenden Zuge (dem paaren Zuge) einen beliebigen andern Punkt $\mathfrak{P}$

an, so müssen aus ihm entweder vier oder keine reelle Tangente an die $C^{(3)}$ gehen, weil diese eine zweizügige ist. Die erste Möglichkeit trifft aber nicht zu, denn sonst müsste die Gerade $|\mathfrak{P}\mathfrak{O}|$ der $C^{(3)}$ in einem dritten Punkte begegnen, welcher nach III. auf demselben Zuge, der durch $\mathfrak{P}$, also auch durch $\mathfrak{O}$ geht, liegen müsste. Dies ist indessen bei I. nicht der Fall, wie wir wissen, sondern der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{O}\mathfrak{P}|$ mit der $C^{(3)}$ liegt auf dem andern Zuge (dem unpaaren), welcher nicht durch $\mathfrak{O}$ geht. Also kann durch $\mathfrak{P}$ keine reelle Tangente an die $C^{(3)}$ gehen.

In dem Falle I. haben also sämtliche Punkte desjenigen Zuges, welcher durch $\mathfrak{O}$ geht, des paaren Zuges, die Eigenschaft, daß keine reelle Tangente aus ihnen an die $C^{(3)}$ geht.

Nehmen wir dagegen im Falle I. den zu $\mathfrak{O}$ zugehörigen Tangentialpunkt $\mathfrak{O}_1$, welcher auf dem nicht durch $\mathfrak{O}$ gehenden Zuge, dem unpaaren, liegen muß, so wird, weil die Kurve eine zweizügige ist, der Punkt $\mathfrak{O}_1$ vier reelle Tangenten an die $C^{(3)}$ senden müssen, und jeder durch $\mathfrak{O}_1$ gezogene Strahl s, welcher noch einen zweiten Punkt $\mathfrak{P}_1$ dieses Zuges enthält, muß nach III. auch seinen dritten Schnittpunkt auf diesem Zuge haben. Aus dem zweiten Punkte $\mathfrak{P}_1$ gehen nun entweder vier reelle Tangenten an die $C^{(3)}$ oder keine, weil sie eine zweizügige ist. Die letztere Möglichkeit ist wiederum ausgeschlossen, denn sonst müsste $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{O}_1|$ der $C^{(3)}$ in einem dritten Punkte begegnen, welcher nach I. auf dem andern nicht durch $\mathfrak{P}_1$, also auch nicht durch $\mathfrak{O}_1$ gehenden Zuge liegen müsste, was nicht der Fall ist. Also haben in dem Falle I. sämtliche Punkte desjenigen Zuges, welcher nicht durch $\mathfrak{O}$ geht, des unpaaren Zuges, die Eigenschaft, vier reelle Tangenten an die $C^{(3)}$ zu senden.

Gehen wir andererseits von dem Falle III. aus, in welchem die $C^{(3)}$ ebenfalls eine zweizügige ist, so wissen wir, daß durch $\mathfrak{O}$ auf dem unpaaren Zuge vier reelle Tangenten an die $C^{(3)}$ gehen. Nehmen wir nun einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ desselben Zuges, so müssen durch ihn entweder vier oder keine reelle Tangente an die $C^{(3)}$ gehen. Die letztere Möglichkeit ist unzutreffend; denn ginge keine reelle

Tangente aus 𝔓 an die $C^{(3)}$, so müsste nach I. jeder durch 𝔓 gezogene Strahl s, welcher einen zweiten Punkt desselben Zuges enthält, seinen dritten Schnittpunkt auf dem andern nicht durch 𝔓 gehenden Zug haben; nun hat aber der Strahl | 𝔓𝔒 | seinen dritten Schnittpunkt auf demselben durch 𝔒 und 𝔓 gehenden Zuge, folglich müssen aus 𝔓 vier reelle Tangenten an die $C^{(3)}$ gehen.

In dem Falle III. haben also sämtliche Punkte des durch 𝔒 gehenden Zuges (des unpaaren Zuges) die Eigenschaft, vier reelle Tangenten an die $C^{(3)}$ zu senden.

Nehmen wir endlich in dem Falle III. irgend einen Punkt 𝔓 des nicht durch 𝔒 gehenden Zuges (des paaren Zuges), so muß der dritte Schnittpunkt von | 𝔒𝔓 | ebenfalls auf demselben, dem paaren Zuge, liegen. Die Möglichkeit, daß 𝔓 vier reelle Tangenten an die $C^{(3)}$ senden könnte, ist dadurch wieder ausgeschlossen, denn sonst müsste jeder durch 𝔓 gehende Strahl s, welcher einen zweiten Punkt desselben Zuges enthielte, auch seinen dritten Schnittpunkt auf demselben Zuge haben, was für den Strahl | 𝔓𝔒 | nicht zutrifft; also kann aus 𝔓 keine reelle Tangente an die $C^{(3)}$ gehen.

Im Falle III. haben also sämtliche Punkte des nicht durch 𝔒 gehenden Zuges (des paaren Zuges) die Eigenschaft, keine reelle Tangente an die $C^{(3)}$ zu senden.

Aus diesen vier Resultaten ersehen wir, daß die fundamentalen Eigenschaften der zweizügigen $C^{(3)}$ in den beiden Fällen I. und III. sich vollständig decken und daß wir sonach das Gesamtresultat aussprechen können:

Eine allgemeine Kurve dritter Ordnung (ohne Doppelpunkt) kann nur zwei wesentlich voneinander verschiedene Gestalten haben; entweder besteht sie aus einem oder aus zwei kontinuierlich verlaufenden Zügen. Die einzügige hat die charakteristische Eigenschaft, daß aus jedem ihrer Punkte nur zwei reelle Tangenten an dieselbe gehen (selbstverständlich außer der Tangente in dem Punkte selbst), die beiden übrigen Tangenten aber konjugiert-imaginär

sind. Die zweizügige $C^{(3)}$ hat die charakteristische Eigenschaft, daß aus sämtlichen Punkten des einen Zuges (des paaren) keine reelle Tangente an die Kurve geht, dagegen aus jedem Punkte des andern Zuges (des unpaaren) vier reelle Tangenten an dieselbe gehen, von denen zwei den paaren und zwei den unpaaren Zug berühren. Die einzügige $C^{(3)}$ bildet selbstverständlich einen unpaaren Zug, indem jede Gerade in der Ebene ihr entweder in einem oder in drei reellen Punkten begegnet. Die zweizügige $C^{(3)}$ wird von jeder Geraden in der Ebene immer so geschnitten, daß von den drei Schnittpunkten eine gerade Anzahl (also 0 oder 2) auf dem paaren Zuge und eine ungerade Anzahl (also 3 oder 1) auf dem unpaaren Zuge liegen.

Die eingeflochtene Bemerkung, daß von den vier reellen Tangenten immer zwei den paaren und zwei den unpaaren Zug berühren, folgt aus dem Falle III., weil der eine Zug ganz in dem einen Paar Scheitelräume, der andere ganz in dem andern Paare enthalten ist von denjenigen Scheitelräumen zwischen $t_1 t_2 t_3 t_4$, welche überhaupt Punkte der Kurve enthalten.

§ 17. Drei Gestalten der einzügigen und fünf der zweizügigen $C^{(3)}$.

1. Jede der beiden Hauptgestalten, in welchen die $C^{(3)}$ auftritt, die einzügige und die zweizügige $C^{(3)}$, bietet mehrere verschiedene Untergestalten dar, wenn man die unendlich entfernten Punkte der $C^{(3)}$ in Betracht zieht. Fassen wir zuerst die einzügige $C^{(3)}$ ins Auge. Die unendlich entfernte Gerade g_∞ begegnet der $C^{(3)}$ im allgemeinen in drei Punkten, von denen einer immer reell sein muß, die beiden andern entweder beide reell und voneinander getrennt sein können, oder beide in einen Punkt zusammenfallen, oder konjugiert-imaginär sein können.

Analog der Terminologie bei den Kegelschnitten unterscheiden wir daher drei Arten der einzügigen $C^{(3)}$, nämlich

1. die elliptische Serpentine,
2. die parabolische Serpentine,
3. die hyperbolische Serpentine.

Die elliptische Serpentine hat nur einen reellen unendlich entfernten Punkt; die Tangente an demselben verläuft im Endlichen und heißt Asymptote. Die elliptische Serpentine hat also nur eine reelle im Endlichen verlaufende Asymptote. Dieselbe begegnet der Kurve noch in einem dritten reellen und im Endlichen liegenden Punkt. Denken wir uns diese Asymptote gezogen, so muß der kontinuierliche Zug von der einen Halbebene auf einer Seite von der reellen Asymptote durch den dritten Schnittpunkt in die andere Halbebene übergehen und sich der Asymptote in dem unendlich entfernten Punkte derselben anschließen von verschiedenen Halbebenen aus nach Art der Hyperbel, welche sich mit ihren beiden Zweigen an eine der Asymptoten anschließt und dadurch im Unendlichen zusammenhängt.*

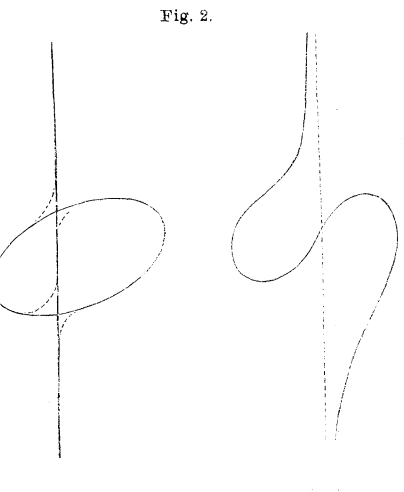
[Anmerkung. Wenn man in einem gewöhnlichen Punkte einer Kurve (der nicht Wendepunkt oder singulär ist) die Tangente zieht, welche zwei benachbarte Punkte derselben verbindet, so kann dies unendlich kleine Kurvenstück allemal ersetzt werden durch ein gleiches Stück eines Kegelschnitts. Für einen gewöhnlichen Kurvenpunkt liegt also die Tangente zur Kurve genau so, wie für einen Punkt des Kegelschnitts, d. h. die unmittelbar vorhergehenden und unmittelbar nachfolgenden Punkte der Kurve befinden sich in derselben Halbebene von der Tangente. Lassen wir durch Projektion oder durch projektive Verwandlung den Kurvenpunkt in die Unendlichkeit gehen, so wird die Art der Berührung bleiben wie beim Kegelschnitt, nämlich wie die Berührung einer Asymptote mit der Hyperbel in einem unendlich entfernten Punkte derselben, d. h. die beiden dem unendlich entfernten Punkte sich nähernden Zweige werden

* H. Durège: „Über die Formen der Kurven dritter Ordnung". Journal f. Math. v. Borchardt, Bd. 75 S. 157.

in entgegengesetzten Halbebenen von der Asymptote liegen und beide mit ihrer konvexen Seite dem unendlich entfernten Punkte zustreben.]

Wir können uns ein anschauliches Bild von der elliptischen Serpentine machen, indem wir eine ausgeartete $C^{(3)}$ nehmen, welche aus einer Ellipse und einer dieselbe in zwei reellen Punkten (Doppelpunkten) schneidenden Geraden besteht; lösen wir sodann die beiden Doppelpunkte in der Weise auf, wie es die nebenstehende Figur 2 zeigt, so entsteht die elliptische Serpentine mit ihrer einzigen reellen Asymptote.

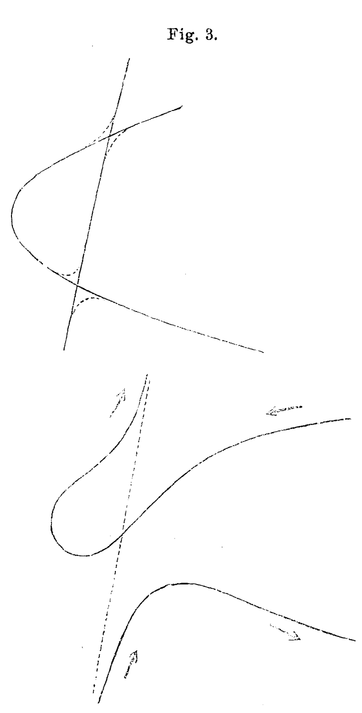
Fig. 2.



2. Die parabolische Serpentine hat außer dem einen reellen unendlich entfernten Punkt mit endlicher Asymptote noch zwei zusammenfallende unendlich entfernte Punkte, also die g_∞ selbst zur Tangente. Wir machen uns ein anschauliches Bild von derselben, indem wir an Stelle der vorigen Ellipse eine Parabel setzen, eine Gerade hinzufügen, welche derselben in zwei reellen Punkten begegnet, das Ensemble von Parabel und Gerader als eine ausgeartete $C^{(3)}$ auffassen und die beiden Doppelpunkte in der Art, wie es die auf Seite 140 stehende Figur 3 zeigt, auflösen. Die parabolische Serpentine besteht daher aus zwei unendlichen Zweigen, die aber einen zusammenhängenden Zug bilden, indem sie einmal die g_∞ berühren und sich in einem unendlich entfernten Punkte derselben vereinigen, außerdem aber in einem dritten unendlich entfernten Punkte an die endliche Asymptote sich von entgegengesetzten Halbebenen aus anschließen nach Art der Hyperbel und dadurch im Unendlichen zusammenhängen.

3. Die hyperbolische Serpentine hat drei unendlich entfernte getrennt voneinander liegende Punkte, also auch drei im Endlichen verlaufende Asymptoten, Tangenten in den drei unendlich entfernten Punkten. Die drei Asymptoten bilden ein Dreiseit, an dessen Seiten sich die Serpentine in den unendlich entfernten Punkten asymptotisch anschliesst, nach Art der Hyperbel von verschiedenen Halbebenen aus dem unendlich entfernten Punkte sich nähernd, indem sie jede der drei Asymptoten noch in einem dritten endlichen Punkte trifft. Diese drei Punkte müssen in einer Geraden liegen (§ 8, 4).

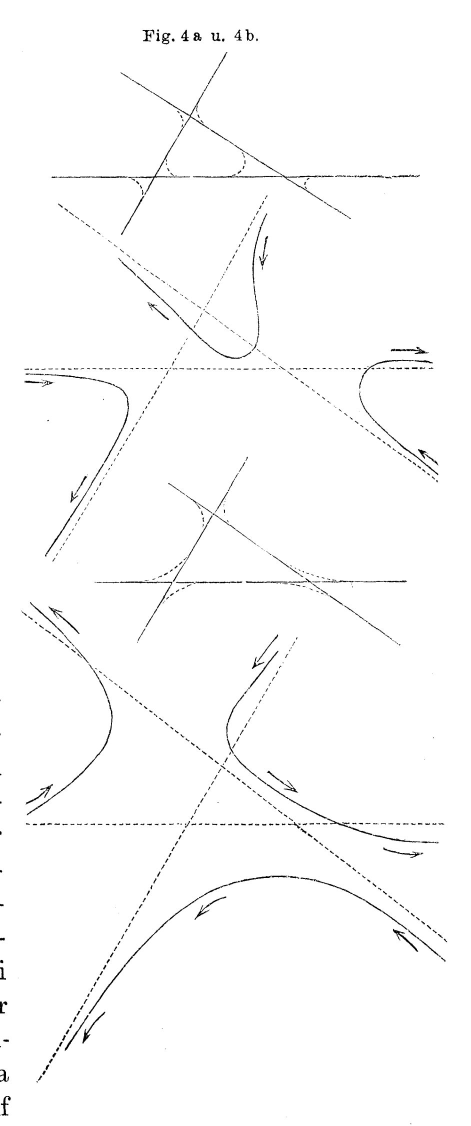
Fig. 3.



Wir können uns ein anschauliches Bild von der hyperbolischen Serpentine machen, indem wir drei Gerade in der Ebene als eine ausgeartete $C^{(3)}$ auffassen und die drei Doppelpunkte, wie in der auf Seite 141 stehenden Figur 4a und 4b auflösen, nämlich in dem von den drei Geraden gebildeten Dreieck entweder zwei innere Winkel und einen Außenwinkel, oder alle drei Außenwinkel. In beiden Fällen nimmt die hyperbolische Serpentine eine gleiche Gestalt an; sie zerfällt nämlich in drei Zweige, die im Unendlichen zusammenhängen; der eine trifft keine der drei Asymptoten in einem endlichen Punkte, der andere eine derselben, der dritte die beiden übrigen. Der kontinuierliche Zusammenhang der drei Zweige, die sich zu einem Zuge zusammenschließen, ist in beiden Figuren durch die Pfeile angedeutet und beide Figuren sind in ihrer Gestaltung nicht wesentlich voneinander verschieden.

4. Gehen wir nunmehr zur zweizügigen $C^{(3)}$ über, so ergeben sich hier wiederum durch Betrachtung der unendlich entfernten Punkte mehrere Arten der zweizügigen $C^{(3)}$; die unendlich entfernte Gerade g_∞ kann nämlich dem paaren Zuge nur in einer geraden Anzahl von Punkten (0 oder 2) dem unpaaren Zuge nur in einer ungeraden Anzahl von Punkten begegnen. Hieraus folgt, daß der unpaare Zug immer einen reellen unendlich entfernten Punkt haben muß, also in demselben auch eine reelle Tangente, Asymptote. Seine beiden andern unendlich entfernten Punkte können entweder konjugiert-imaginär sein, oder zusammenfallen, oder reell sein und getrennt voneinander liegen; der paare Zug kann nur entweder zwei reelle, getrennt voneinander liegende Punkte oder zwei zusammenfallende, oder zwei konjugiert-imaginäre Punkte haben. Da aber die Anzahl der auf beiden Zügen zusammen enthaltenen Punkte immer nur drei sein kann, so ergeben sich nur folgende fünf Möglichkeiten:

Fig. 4a u. 4b.



Die g_∞ enthält Punkte:

	auf dem paaren Zuge:	auf dem unpaaren Zuge:
1.	keinen,	einen reellen und zwei konjugiert-imaginäre,
2.	zwei zusammenfallende,	einen reellen,
3.	zwei reelle und getrennt liegende,	einen reellen,
4.	keinen,	einen reellen und zwei zusammenfallende,
5.	keinen,	drei reelle und getrennt liegende.

Nennen wir, wie es in § 16 geschehen ist, den unpaaren Zug die Serpentine, den paaren Zug das Oval, so ergeben sich folgende fünf Arten der zweizügigen $C^{(3)}$:

1. elliptische Serpentine mit elliptischem Oval,
2. elliptische Serpentine mit parabolischem Oval,
3. elliptische Serpentine mit hyperbolischem Oval,
4. parabolische Serpentine mit elliptischem Oval,
5. hyperbolische Serpentine mit elliptischem Oval.

Daß keine parabolische oder hyperbolische Serpentine mit parabolischem oder hyperbolischem Oval existieren kann, ist selbstverständlich, weil die $C^{(3)}$ nicht mehr als drei reelle unendlich entfernte Punkte haben kann.

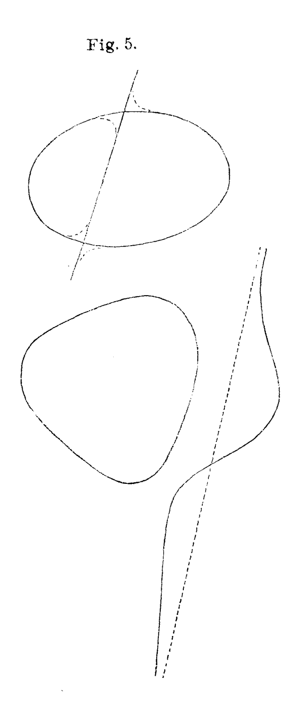
Wir wollen nun diese fünf Gestalten näher betrachten.

5. Die elliptische Serpentine mit elliptischem Oval hat nur einen reellen Punkt und eine reelle Asymptote, an welche sich die Serpentine in gleicher Weise anschließt, im Unendlichen zusammenhängend wie die in 1. betrachtete einzügige elliptische Serpentine. Wir machen uns wiederum ein anschauliches Bild von derselben, indem wir eine ausgeartete $C^{(3)}$ nehmen, welche aus einer Ellipse und einer dieselbe in zwei reellen Punkten schneidenden Geraden besteht, diese beiden Doppelpunkte aber in anderer Weise auflösen, wie früher, nämlich so wie in der auf Seite 143 stehenden Figur 5.

Das Oval bildet eine in sich geschlossene, durchweg im Endlichen verlaufende Gestalt, wie sie schematisch in der Figur angedeutet ist.

Die elliptische Serpentine mit parabolischem Oval unterscheidet sich von der vorigen Gestalt nur dadurch, daß das Oval sich parabelartig bis in die Unendlichkeit erstreckt, die g_∞ berührt; wir gelangen zu einem anschaulichen Bild derselben, indem wir eine ausgeartete $C^{(3)}$ nehmen, welche aus einer Parabel und einer dieselbe in zwei reellen Punkten schneidenden Geraden besteht, diese beiden Doppelpunkte aber in anderer Weise auflösen wie bei der einzügigen parabolischen Serpentine, nämlich so wie in der auf Seite 144 stehenden Figur 6.

Fig. 5.

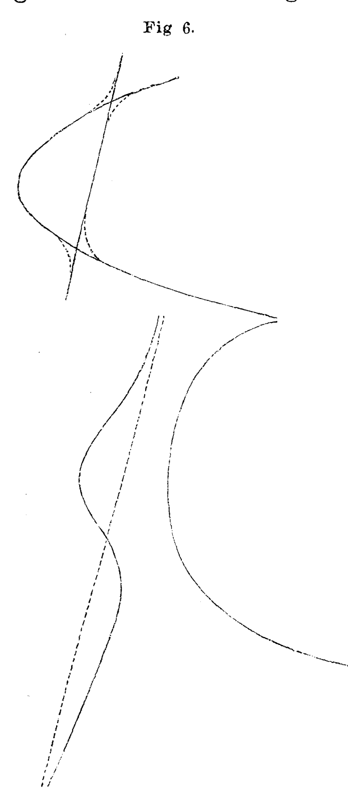


Die Kurve besteht aus zwei bis ins Unendliche sich erstreckenden Zweigen, deren jeder in sich zusammenhängt, der eine asymptotisch an die einzige reelle endliche Asymptote sich anschließend, der andere parabelartig die g_∞ berührend.

Die elliptische Serpentine mit hyperbolischem Oval hat drei reelle im Endlichen verlaufende Asymptoten; der einen Asymptote schließt sich die Serpentine im Unendlichen an, wie in den beiden früheren Fällen; dagegen spaltet sich das Oval in zwei Zweige, ebenso wie die Hyperbel, und beide Zweige des Ovals schließen sich den beiden übrigen Asymptoten im Unendlichen an, ebenso wie die beiden Zweige einer Hyperbel an ihre beiden Asymptoten. Diese beiden Zweige hängen also im Unendlichen miteinander zusammen und bilden einen kontinuierlichen Zug. Die

Serpentine schneidet alle drei Asymptoten in je einem endlichen Punkt. Die ganze Kurve besteht daher aus drei bis ins Unendliche verlaufenden Zweigen, von denen zwei unter sich zusammenhängen, der dritte mit sich selbst; der Zusammenhang der ersteren ist in der auf Seite 145 stehenden Figur 7 durch Pfeile angedeutet.

Fig 6.

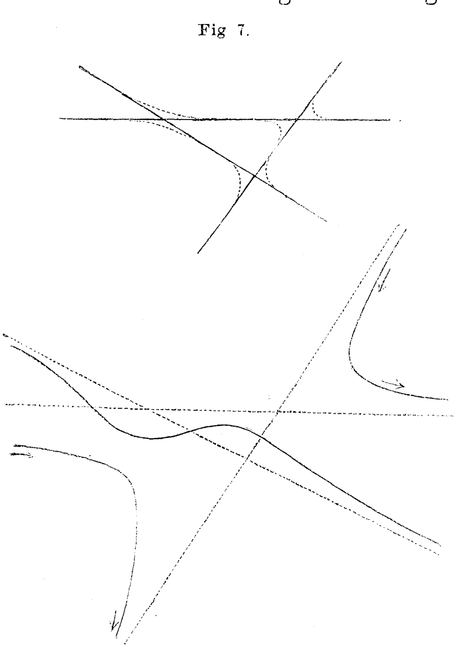


Wir machen uns ein anschauliches Bild von dieser Kurve, indem wir eine in drei Gerade ausgeartete $C^{(3)}$ nehmen und die drei Doppelpunkte in anderer Weise auflösen, wie bei der einzügigen hyperbolischen Serpentine, nämlich so wie die auf Seite 145 stehende Figur es zeigt, indem wir einen inneren Winkel und zwei Außenwinkel des Dreiecks auflösen.

6. Die parabolische Serpentine mit elliptischem Oval unterscheidet sich von der einzügigen parabolischen Serpentine dadurch, daß zu derselben noch ein ganz im Endlichen verlaufendes Oval hinzutritt. Die Serpentine zerfällt in zwei unendliche Zweige, indem sie einmal an die einzige endliche Asymptote nach Art der Hyperbel in dem unendlich entfernten Punkte sich anschließt und zusammenhängt und zweitens gleichzeitig in einem andern unendlich entfernten Punkte die g_∞ berührt, also parabelartig in demselben zusammenhängt. Wir machen uns wieder ein anschauliches Bild der Kurve, indem wir von einer ausgearteten $C^{(3)}$ ausgehen, die aus einer Parabel und einer

dieselbe in zwei reellen Punkten schneidenden Geraden besteht, diese beiden Doppelpunkte aber in anderer Weise auflösen, wie bei der einzügigen parabolischen Serpentine, nämlich so, wie die auf Seite 146 stehende Figur 8 es zeigt.

Fig 7.

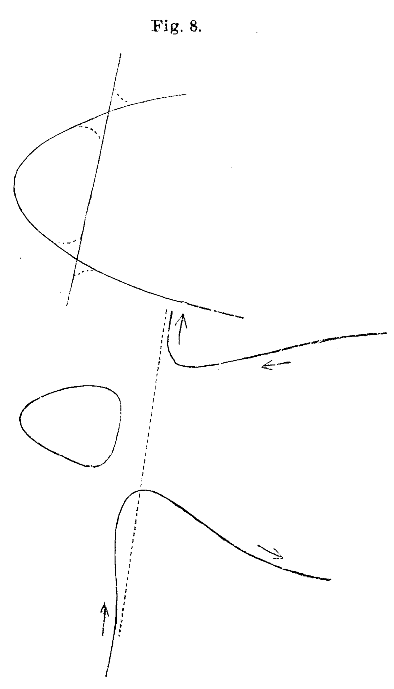


Endlich bleibt uns als letzte Gestalt noch zu betrachten übrig die hyperbolische Serpentine mit elliptischem Oval, welche drei unendlich entfernte getrennt voneinander liegende Punkte, also drei reelle im Endlichen verlaufende Asymptoten hat. Sie unterscheidet sich von der einzügigen hyperbolischen Serpentine nur dadurch, daß zu den drei Zweigen, in welche die Serpentine zerfällt, noch ein vierter, nämlich ein ganz im Endlichen verlaufendes Oval hinzutritt. Der Zusammenhang der Serpentine ist für diesen Fall schon bei der einzügigen erläutert. Wir machen uns ein anschauliches Bild von dieser Gestalt, indem wir von einer in drei Gerade ausgearteten $C^{(3)}$ ausgehen und die drei Doppelpunkte derselben dergestalt auflösen, daß wir alle drei inneren Winkel des Dreiecks verschwinden lassen, wie es die auf Seite 147 stehende Figur 9 zeigt.

7. Hierdurch sind sämtliche verschiedenen Gestalten, welche die $C^{(3)}$ überhaupt annehmen kann, erschöpft; es giebt deren acht, von denen drei der einzügigen und fünf der zweizügigen $C^{(3)}$ angehören; bei der einzügigen giebt es eine Übergangsgestalt (parabolische), bei der zweizügigen zwei Übergangsgestalten. Wir erkennen auch aus unserer

Betrachtung, daß alle möglichen voneinander verschiedenen Gestalten, welche durch die in mehrfacher Weise mögliche

Fig. 8.



Auflösung der Doppelpunkte bei einer ausgearteten $C^{(3)}$ zum Vorschein kommen, hierin enthalten sind und daß keine neuen Gestalten durch anderweitige Auflösung der Doppelpunkte hervorgehen können.* Wir bemerken noch,

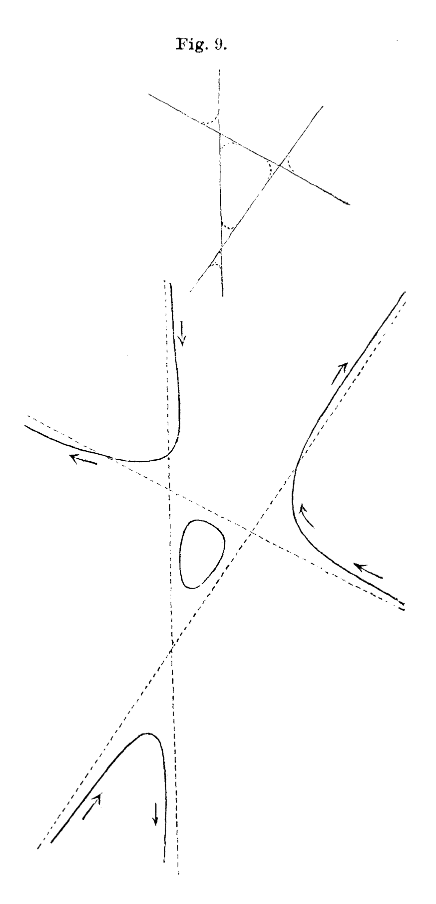
* Dieses Prozesses erwähnt als von Plücker herstammend Herr F. Klein in seiner Abhandlung: Über Flächen dritter Ordnung. (Math. Ann., Bd. VI S. 551.)

Vergl. auch Zeuthen: Sur les differentes formes des courbes planes du quatrième ordre. (Math. Ann., Bd. VII S. 410.)

Die Einteilung der allgemeinen Kurven dritter Ordnung in ihre beiden Gattungen, die einzügige und die zweizügige, ist von Cremona aufgestellt in der Abhandlung: Considerazioni sulle curve piane del terz' ordine (Battaglini, Giornale di matematiche, tom II pag. 78), von H. Durège behandelt in der Abhandlung: Über Formen der Kurven dritter Ordnung (Borchardt, Journal f. Math., Bd. 75 S. 153 und Bd. 76 S. 59.)

daß die Figuren nicht strenge, sondern nur schematisch die Gestalten veranschaulichen. Es wäre jetzt nur noch der Fall in Betracht zu ziehen, daß alle drei unendlich entfernten Punkte der $C^{(3)}$ in einen einzigen zusammenfallen; dieser müßte dann ein Wendepunkt der Kurve sein und die g_∞ seine Wendetangente. Es würde dabei nur die Serpentine sich verändern, indem sie gleichzeitig eine parabolische und eine hyperbolische wird, also der g_∞ sich parabolisch anschließt und weiter keine endliche Asymptote besitzt. Bei der zweizügigen $C^{(3)}$ würde in diesem Fall noch ein endliches Oval, bei der einzügigen keines hinzutreten. Ist aber nur einer der drei unendlich entfernten Punkte ein Wendepunkt, ohne daß die beiden andern unendlich entfernten Punkte mit ihm zusammenfallen, so ändert die Serpentine ihren Charakter, indem sie nicht, wie im allgemeinen, von verschiedenen Halbebenen aus dem unendlich entfernten Punkte der Asymptote sich nähert und im Unendlichen anschließt, sondern von einer und derselben Halbebene aus verlaufend sich dem unendlich entfernten Punkte der endlichen Asymptote nähert; denn die Asymptote kann in diesem Fall keinen endlichen dritten Schnittpunkt mit der $C^{(3)}$ weiter gemein haben,

Fig. 9.



also auch nicht von einer Halbebene in die andere übertreten.*

§ 18. Bedingungen für die Erzeugung einer einzügigen $C^{(3)}$ (Serpentine) durch zwei projektive Strahleninvolutionen in halbperspektiver Lage.

1. Wir wissen nach § 16, daß aus jedem Punkte einer einzügigen $C^{(3)}$ nur zwei reelle Tangenten t_1 und t_2 an dieselbe gehen, die beiden andern allemal konjugiert-imaginär sind. Berühren nun t_1 und t_2 in den Punkten $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$, so können nur diese allein als ein Paar konjugierter Punkte aufgefaßt werden, durch welche das ganze System von Paaren konjugierter Punkte bestimmt wird, und wir haben also nur ein einziges System von Paaren konjugierter Punkte, anstatt, wie im allgemeinen, drei Systeme (§ 15).

Nehmen wir jetzt einen beliebigen Punkt $\mathfrak{T}_1$ der Kurve und legen aus ihm die beiden reellen Tangenten t_1 und t_2 an dieselbe, welche in $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ berühren, so ist der ganze Zug der Kurve, wie wir aus § 16 wissen, mit seinen reellen Punkten in einem Paar Scheitelräume zwischen den beiden Strahlen t_1 und t_2 enthalten, während die beiden übrigen Scheitelräume (Nebenscheitelräume) gar keinen reellen Punkt der $C^{(3)}$ enthalten. Die Verbindungslinie $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2|$ muß daher der Kurve in einem dritten reellen Punkt $\mathfrak{T}_2$ begegnen, welcher ebenfalls in den beiden ersten Scheitelräumen liegt.

Wenn wir einen beliebigen Punkt unserer Kurve mit $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ verbinden und diese Verbindungsstrahlen zum dritten Mal in $\mathfrak{t}_1'$ und $\mathfrak{t}_2'$ der Kurve begegnen, so müssen dieselben ebenfalls in den vorigen beiden Scheitelräumen enthalten sein, in welchen überhaupt Kurvenpunkte liegen. Da nun $\mathfrak{t}_1'$ und $\mathfrak{t}_2'$ ein zweites Paar konjugierter Punkte sind, und die zu $\mathfrak{T}_1$ zugehörige Strahleninvolution durch die beiden Strahlenpaare

* Vergl. H. Schröter: „Über Kurven dritter Ordnung" (Math. Ann., Bd. VI S. 102).

$$|\mathfrak{T}_1 \mathfrak{t}_1| \text{ und } |\mathfrak{T}_1 \mathfrak{t}_2|, \quad |\mathfrak{T}_1 \mathfrak{t}_1'| \text{ und } |\mathfrak{T}_1 \mathfrak{t}_2'|$$

bestimmt wird, so muß, weil das eine Strahlenpaar durch das andere nicht getrennt wird, die zu $\mathfrak{T}_1$ zugehörige Strahleninvolution notwendig eine hyperbolische sein.

Zu $\mathfrak{T}_1$ ist der konjugierte Punkt $\mathfrak{T}_2$, wie wir wissen, der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2|$ mit der Kurve. Der durch $\mathfrak{T}_2$ gehende Strahl $|\mathfrak{T}_2 \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2|$ verbindet zwei konjugierte Punkte der $C^{(3)}$, ist also ein Doppelstrahl der zu $\mathfrak{T}_2$ zugehörigen Strahleninvolution, und diese ist daher ebenfalls eine hyperbolische. Da die den beiden konjugierten Punkten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zugehörigen Strahleninvolutionen beide hyperbolisch sind, so müssen die den sämtlichen Paaren konjugierter Punkte zugehörigen Strahleninvolutionen immer gleichartig sein (§ 15, 3). Sie müssen aber in unserem Falle immer beide hyperbolisch sein, weil das, was von dem willkürlich auf der $C^{(3)}$ angenommenen Punkte $\mathfrak{T}_1$ gilt, auch von jedem andern Punkte derselben gelten muß; mithin sind für eine einzügige $C^{(3)}$ zwei erzeugende projektive Strahleninvolutionen immer beide hyperbolisch.

2. Da die Doppelstrahlen der zu $\mathfrak{T}_1$ zugehörigen hyperbolischen Strahleninvolution durch jedes Paar konjugierter Strahlen derselben harmonisch getrennt werden, so muß einer dieser beiden Doppelstrahlen in diejenigen beiden Scheitelräume zwischen t_1 und t_2 hineinfallen, welche die Punkte der Kurve enthalten und der andere Doppelstrahl in die Nebenscheitelräume, welche keinen reellen Punkt der Kurve enthalten. Der erste Doppelstrahl muß der Kurve in zwei reellen Punkten begegnen (§ 16), der andere in zwei konjugiert-imaginären. Dasselbe gilt auch, wie von $\mathfrak{T}_1$, von jedem andern Punkte der Kurve. Wir können demnach folgendes Resultat aussprechen:

Eine einzügige Kurve dritter Ordnung (Serpentine) kann nur erzeugt werden von zwei Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage, die beide hyperbolisch sind und eine derartige Lage haben, daß von jeder derselben

der eine Doppelstrahl der Kurve in zwei reellen, der andere in zwei konjugiert-imaginären Punkten begegnet. (Die $C^{(3)}$ ist also hyperbolischen Charakters, § 15.)

3. Wir können die Bedingung für die Lage der beiden erzeugenden hyperbolischen Strahleninvolutionen noch schärfer aussprechen, wenn wir uns des Hilfsmittels bedienen, von dem wir schon früher wiederholt Gebrauch gemacht haben (§ 3), indem wir jede der beiden Strahleninvolutionen vermittelst eines Hilfskegelschnitts auf ein einfaches Strahlbüschel reduzieren.

Seien $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ die Mittelpunkte der beiden erzeugenden hyperbolischen Strahleninvolutionen und $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{T}|$, $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{T}|$ die Tangenten der Kurve in den Punkten $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$, welche den gemeinschaftlichen Tangentialpunkt $\mathfrak{T}$ haben. Ein Hilfskegelschnitt $K^{(2)}$, welcher durch $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ geht und in diesen Punkten dieselben Tangenten $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{T}|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{T}|$ hat, wie die $C^{(3)}$, wird von den Strahlenpaaren einer jeden der beiden erzeugenden Strahleninvolutionen in Punktepaaren durchbohrt, deren Sehnen bez. durch zwei feste Punkte $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ laufen und zwei einfache Strahlbüschel beschreiben. Diese stehen in projektiver Beziehung, weil die beiden erzeugenden Strahleninvolutionen projektiv sind. Da diese ferner hyperbolisch sind, so müssen die Mittelpunkte $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ außerhalb des Hilfskegelschnitts $K^{(2)}$ liegen. Wegen der halbperspektiven Lage muß dem Strahlenpaar

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{T}| \text{ und } |\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$$

das Strahlenpaar

$$|\mathfrak{O}_2\mathfrak{T}| \text{ und } |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_1|$$

entsprechend sein; die zugehörigen Durchbohrungssehnen mit $K^{(2)}$ fallen daher zusammen in die Verbindungslinie

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|,$$

und die beiden Punkte $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ müssen folglich auf dieser Verbindungslinie liegen; zugleich folgt aber auch, daß die beiden Strahlbüschel $[\mathfrak{C}_1]$ und $[\mathfrak{C}_2]$, welche projektiv sind, perspektive Lage haben, weil in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen;

sie erzeugen daher eine gerade Linie l, von der jeder Punkt $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ verbunden zwei entsprechende Strahlen der Reduktions-Strahlenbüschel $[\mathfrak{E}_1]$ und $[\mathfrak{E}_2]$ liefert; ist also diese Gerade l ermittelt, und ist $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt derselben, so schneidet

$|\mathfrak{E}_1\mathfrak{x}|$ den $K^{(2)}$ in dem Punktepaar $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_1'$,
$|\mathfrak{E}_2\mathfrak{x}|$ " " " " " $\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_2'$,

und die Strahlenpaare

$$|\mathfrak{D}_1\mathfrak{y}_1| \text{ und } |\mathfrak{D}_1\mathfrak{y}_1'|, \quad |\mathfrak{D}_2\mathfrak{y}_2| \text{ und } |\mathfrak{D}_2\mathfrak{y}_2'|$$

sind allemal entsprechende Strahlenpaare der beiden erzeugenden Strahleninvolutionen, deren projektive Abhängigkeit durch die gerade Punktreihe $[\mathfrak{x}]$ auf l vermittelt wird.

4. Die Doppelstrahlen der beiden erzeugenden Strahleninvolutionen $[\mathfrak{D}_1]$ und $[\mathfrak{D}_2]$ mögen die Gerade l bez. in den Punktepaaren

$$\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_1' \text{ und } \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_2'$$

treffen, dann läßt sich die Bedingung für die Erzeugung der einzügigen $C^{(3)}$ aus der Lage dieser beiden Punktepaare zueinander bestimmen. *Sobald nämlich jedes dieser beiden Punktepaare durch das andere getrennt wird, muß die erzeugte $C^{(3)}$ eine einzügige sein.*

In der That, liegen die vier Punkte $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_1'$ und $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_2'$ so, daß das erste Paar durch das zweite getrennt wird, so wird auch das zweite durch das erste Paar getrennt.

$\mathfrak{s}_1$ $\mathfrak{s}_1'$ l
$\mathfrak{s}_2$ $\mathfrak{s}_2'$

Nun sind $|\mathfrak{E}_1\mathfrak{s}_1|$ und $|\mathfrak{E}_1\mathfrak{s}_1'|$ die beiden Tangenten aus $\mathfrak{E}_1$ an den Hilfskegelschnitt $K^{(2)}$, ebenso $|\mathfrak{E}_2\mathfrak{s}_2|$ und $|\mathfrak{E}_2\mathfrak{s}_2'|$ die beiden Tangenten aus $\mathfrak{E}_2$ an den Hilfskegelschnitt $K^{(2)}$; daher wird von den beiden Strahlen $|\mathfrak{E}_1\mathfrak{s}_2|$ und $|\mathfrak{E}_1\mathfrak{s}_2'|$ der eine dem $K^{(2)}$ in einem reellen Punktepaar, der andere in einem konjugiert-imaginären Punktepaar begegnen müssen wegen der Lage der vier Punkte $\mathfrak{s}$. Der eine Doppelstrahl $|\mathfrak{D}_2\mathfrak{s}_2|$ der erzeugenden Strahleninvolution $[\mathfrak{D}_2]$ wird also von dem entsprechenden Strahlenpaare der erzeugenden Strahleninvolution $[\mathfrak{D}_1]$ in zwei reellen Punkten, der andere

Doppelstrahl $|\mathfrak{O}_2 \mathfrak{s}_2'|$ in zwei konjugiert-imaginären Punkten getroffen, und dasselbe gilt für die beiden Doppelstrahlen der erzeugenden Strahleninvolution $[\mathfrak{O}_1]$. Es findet also in der That die für die einzügige $C^{(3)}$ charakteristische Eigenschaft statt, daß von den beiden Doppelstrahlen der erzeugenden Strahleninvolutionen der eine der $C^{(3)}$ in zwei reellen, der andere in zwei konjugiert-imaginären Punkten begegnet; also ist die vorige Behauptung bestätigt.

Was von dem willkürlich gewählten Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ auf der $C^{(3)}$ gilt als Mittelpunkten zweier erzeugenden Strahleninvolutionen, muß in gleicher Weise für jedes andere Paar konjugierter Punkte derselben Kurve gelten, weil alle die gleiche charakteristische Eigenschaft besitzen, nur zwei reelle Tangenten an die Kurve zu senden.

§ 19. Bedingungen für die Erzeugung einer zweizügigen $C^{(3)}$ durch zwei projektive Strahleninvolutionen in halbperspektiver Lage.

1. Wir haben in § 16 als charakteristische Eigenschaft der zweizügigen $C^{(3)}$ kennen gelernt, daß aus jedem Punkte des paaren Zuges derselben keine, aus jedem Punkte des unpaaren Zuges vier reelle Tangenten an dieselbe gehen. Nehmen wir daher einen Punkt $\mathfrak{O}$ des unpaaren Zuges, so lassen sich die von ihm ausgehenden Tangenten

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$$

immer so bezeichnen, daß t_1 und t_2 an den paaren Zug gehen und zugleich die beiden Scheitelräume fixieren, in denen der ganze paare Zug enthalten ist, t_3 und t_4 an den unpaaren Zug gehen und ebenfalls zwei Scheitelräume fixieren, innerhalb deren der ganze unpaare Zug verläuft, daß ferner zwischen diesen vier Scheitelräumen vier andere sich hineinfügen, die keinen reellen Punkt der $C^{(3)}$ enthalten, und endlich die vier Tangenten in der Reihenfolge

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$$

von einem um $\mathfrak{O}$ kontinuierlich gedrehten Strahl s erreicht werden (§ 16).



Dies vorausgesetzt, wird das Strahlenpaar $t_1 t_2$ nicht getrennt durch das Strahlenpaar $t_3 t_4$, ebensowenig $t_1 t_4$ durch $t_2 t_3$, dagegen wird $t_1 t_3$ durch $t_2 t_4$ getrennt.

Bezeichnen wir die Berührungspunkte der vier Tangenten entsprechend mit

$$\mathrm{t}_1,\ \mathrm{t}_2,\ \mathrm{t}_3,\ \mathrm{t}_4,$$

so lassen sich dieselben auf dreierlei Art in Paare konjugierter Punkte (mit demselben Tangentialpunkt) zerlegen (§ 15)

1) t_1 und t_2, t_3 und t_4 als Paare konjugierter Punkte,
2) t_1 „ t_3, t_2 „ t_4 „ „ „ „
3) t_1 „ t_4, t_2 „ t_3 „ „ „ „

Gemäß unserer Annahme für die Lage der vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 wird dann im ersten Falle die zu $\mathfrak{O}$ zugehörige Strahleninvolution eine hyperbolische, im zweiten Falle eine elliptische und im dritten Falle wieder eine hyperbolische sein, und für jeden dieser drei Fälle ist das ganze System der Paare konjugierter Punkte und der zugehörigen Strahleninvolutionen vollständig bestimmt.

2. Im ersten Falle ist nun, wie wir wissen, der zu $\mathfrak{O}$ konjugierte Punkt $\mathfrak{O}_1$ der Schnittpunkt

$$(\mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2,\ \mathrm{t}_3 \mathrm{t}_4) = \mathfrak{O}_1,$$

die ihm zugehörige Strahleninvolution eine hyperbolische, und $|\mathrm{t}_1 \mathrm{t}_2|$, $|\mathrm{t}_3 \mathrm{t}_4|$ sind ihre beiden Doppelstrahlen; der erste begegnet dem paaren, der zweite dem unpaaren Zuge in je zwei reellen Punkten; folglich liegt der Punkt $\mathfrak{O}_1$ auf dem unpaaren Zuge. Das Gleiche gilt von dem Punkte $\mathfrak{O}$ und demgemäß von jedem Paare konjugierter Punkte, die auf dem unpaaren Zuge liegen. Dagegen muß jeder Punkt des paaren Zuges seinen konjugierten Punkt wieder auf dem paaren Zuge haben und jedem Punkte des paaren Zuges muß eine elliptische Strahleninvolution zugehören; denn sei $\mathfrak{P}$ ein solcher, und gehörte ihm eine hyperbolische Strahleninvolution zu, so müßte ein reeller Doppelstrahl derselben der Kurve in zwei konjugierten Punkten begegnen, von denen einer auf dem paaren, der andere auf dem unpaaren



Zuge liegen müßte. Dies ist aber nicht möglich, weil in unserem Falle konjugierte Punkte immer auf demselben Zuge liegen; also kann auch die zu $\mathfrak{P}$ zugehörige Strahleninvolution keine hyperbolische sein.

Wir erhalten also im ersten Falle folgendes Resultat:

Wenn die beiden erzeugenden Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage beide hyperbolisch sind und jeder der vier Doppelstrahlen der beiden Involutionen der Kurve in je zwei reellen Punkten begegnet, so ist die von ihnen erzeugte $C^{(3)}$ eine zweizügige. Die Mittelpunkte der beiden erzeugenden Strahleninvolutionen liegen auf dem unpaaren Zuge. Die Paare konjugierter Punkte der Kurve liegen so verteilt auf derselben, daß jedes Paar auf demselben Zuge sich befindet. Jedem Punkte des unpaaren Zuges gehört eine hyperbolische Strahleninvolution zu, deren Doppelstrahlen der Kurve in je zwei reellen Punkten begegnen. Jedem Punkte des paaren Zuges gehört eine elliptische Strahleninvolution zu. (Die $C^{(3)}$ ist also elliptischen Charakters, § 15.)

3. Im zweiten Falle ist die zu $\mathfrak{O}$ zugehörige Strahleninvolution eine elliptische; der zu $\mathfrak{O}$ konjugierte Punkt $\mathfrak{O}_1$ ist der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4) = \mathfrak{O}_1,$$

die ihm zugehörige Strahleninvolution ist eine hyperbolische, und $|\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_3|$, $|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_4|$ sind ihre Doppelstrahlen; der Punkt $\mathfrak{O}_1$ liegt daher auf dem paaren Zuge. Das Gleiche gilt von jedem Paare konjugierter Punkte, von denen immer der eine auf dem unpaaren, der andere auf dem paaren Zuge liegt. Die dem ersteren Punkte zugehörige Strahleninvolution ist immer eine elliptische, die dem zweiten zugehörige eine hyperbolische. Die Doppelstrahlen der letzteren begegnen beide der Kurve in reellen Punktepaaren.

Wir schließen also für den zweiten Fall folgendes Resultat:

Wenn von den beiden erzeugenden Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage die eine hyperbolisch, die andere elliptisch ist, so ist die von ihnen erzeugte $C^{(3)}$ eine zweizügige. Der Mittelpunkt der elliptischen Strahleninvolution liegt auf dem unpaaren, der Mittelpunkt der hyperbolischen auf dem paaren Zuge. Die Paare konjugierter Punkte liegen so verteilt auf der Kurve, daß jeder Punkt des einen Zuges seinen konjugierten Punkt auf dem andern Zuge hat. Jedem Punkte des unpaaren Zuges gehört eine elliptische, jedem Punkte des paaren Zuges eine hyperbolische Strahleninvolution zu. Die Doppelstrahlen der letzteren begegnen beide der Kurve in reellen Punktepaaren. (Die $C^{(3)}$ ist also dualen Charakters, § 15.)

4. Im dritten Falle ist die zu $\mathfrak{O}$ zugehörige Strahleninvolution eine hyperbolische, und der eine Doppelstrahl derselben muß in die Scheitelräume zwischen t_2 und t_3, der andere in die Scheitelräume zwischen t_4 und t_1 hineinfallen, welche beide keinen reellen Punkt der $C^{(3)}$ enthalten, also beide Doppelstrahlen begegnen der Kurve in konjugiertimaginären Punkten. Der zu $\mathfrak{O}$ konjugierte Punkt $\mathfrak{O}_1$ ist der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3,\ \mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_1) = \mathfrak{O}_1,$$

er liegt daher auf dem paaren Zuge, und die ihm zugehörige Strahleninvolution ist eine hyperbolische, deren beide Doppelstrahlen $|\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3|$ und $|\mathfrak{t}_4\mathfrak{t}_1|$ der Kurve in reellen Punktepaaren begegnen. Das Gleiche gilt von jedem Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$, von denen immer der eine auf dem unpaaren, der andere auf dem paaren Zuge der $C^{(3)}$ liegt. Wir können demgemäß folgendes Resultat aussprechen:

Wenn die beiden erzeugenden Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage hyperbolisch sind und die Doppelstrahlen der einen hyperbolischen Strahleninvolution in keinem reellen Punkte der Kurve begegnen, dann ist die von ihnen erzeugte $C^{(3)}$ eine zweizügige. Der

Mittelpunkt dieser Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen in keinem reellen Punkte der Kurve begegnen, liegt auf dem unpaaren Zuge; der Mittelpunkt der andern Strahleninvolution des konjugierten Punktes dagegen liegt auf dem paaren Zuge, und die Doppelstrahlen derselben begegnen der Kurve in reellen Punktepaaren. Die Paare konjugierter Punkte liegen so verteilt auf der Kurve, daß jeder Punkt des einen Zuges seinen konjugierten Punkt auf dem andern Zuge hat. Sämtlichen Punkten beider Züge gehören hyperbolische Strahleninvolutionen zu, aber den Punkten des unpaaren Zuges solche, deren Doppelstrahlen der Kurve in keinem reellen Punkte begegnen, den Punkten des paaren Zuges solche, deren Doppelstrahlen beide in je zwei reellen Punkten der Kurve begegnen. (Die $C^{(3)}$ ist also hyperbolischen Charakters, § 15.)

Der Fall, daß für zwei erzeugende hyperbolische Strahleninvolutionen keiner der vier Doppelstrahlen der Kurve in reellen Punkten begegnet, kann niemals eintreten. Denn sobald nur einer der Mittelpunkte beider erzeugenden Strahleninvolutionen auf dem unpaaren Zuge liegt, muß sein konjugierter Punkt immer eine hyperbolische Strahleninvolution aussenden, deren Doppelstrahlen beide der Kurve in reellen Punkten begegnen, weil bei der zweizügigen $C^{(3)}$ von dem ersteren Punkte vier reelle Tangenten an dieselbe gehen. Liegt aber einer der beiden Mittelpunkte der erzeugenden Strahleninvolutionen auf dem paaren Zuge und ist diese eine hyperbolische, so muß ein reeller Doppelstrahl derselben, weil er einen Punkt des paaren Zuges enthält, noch einen zweiten reellen Punkt desselben enthalten und den dritten Schnittpunkt auf dem unpaaren Zuge haben; jedenfalls muß es ein Doppelstrahl sein, welcher der Kurve in zwei reellen Punkten begegnet; also ist es nicht möglich, daß von zwei erzeugenden hyperbolischen Strahleninvolutionen der zweizügigen $C^{(3)}$ alle vier Doppelstrahlen keinen weiteren reellen Punkt der Kurve enthalten.

5. Wir müssen aber nun noch einmal zu dem ersten Falle zurückkehren, bei welchem Paare konjugierter Punkte immer auf demselben Zuge der zweizügigen $C^{(3)}$ enthalten sind. Wir haben nämlich nur die Voraussetzung gemacht, daß der Punkt $\mathfrak{O}$, von welchem wir ausgingen, auf dem unpaaren Zuge (1.) liege. Nehmen wir dagegen einen Punkt $\mathfrak{P}$ des paaren Zuges an, so bestimmen die Strahlenpaare

1) $|\mathfrak{P}t_1|\;|\mathfrak{P}t_2|$ und $|\mathfrak{P}t_3|\;|\mathfrak{P}t_4|$,

2) $|\mathfrak{P}t_1|\;|\mathfrak{P}t_3|$ „ $|\mathfrak{P}t_2|\;|\mathfrak{P}t_4|$,

3) $|\mathfrak{P}t_1|\;|\mathfrak{P}t_4|$ „ $|\mathfrak{P}t_2|\;|\mathfrak{P}t_3|$

drei Strahleninvolutionen, von denen bekanntlich immer zwei hyperbolisch sein müssen und die dritte elliptisch ist. Da nun in den Fällen 2) und 3) die jedem Punkt $\mathfrak{P}$ des paaren Zuges zugehörige Strahleninvolution eine hyperbolische ist, so muß sie in dem Falle 1) eine elliptische sein. Also müssen in dem ersten Falle, wenn wir zwei konjugierte Punkte auf dem paaren Zuge der $C^{(3)}$ (und in diesem Falle liegen immer zwei konjugierte Punkte auf demselben Zuge der Kurve) als Mittelpunkte erzeugender Strahleninvolutionen wählen, dieselben beide elliptisch sein. Wir müssen daher dem ersten Falle noch ein zweites Resultat hinzufügen:

Wenn die beiden erzeugenden Strahleninvolutionen in projektiver Beziehung und halbperspektiver Lage elliptisch sind, so ist die von ihnen erzeugte $C^{(3)}$ eine zweizügige, und die Mittelpunkte beider Strahleninvolutionen liegen auf dem paaren Zuge. Die Paare konjugierter Punkte liegen so verteilt auf derselben, daß jedes Paar auf demselben Zuge sich befindet. Jedem Punkte des paaren Zuges gehört eine elliptische Strahleninvolution zu; jedem Punkte des unpaaren Zuges eine hyperbolische, deren Doppelstrahlen der Kurve in je zwei reellen Punkten begegnen. (Die $C^{(3)}$ ist also elliptischen Charakters.) Hierdurch sind alle Möglichkeiten für die Erzeugung einer $C^{(3)}$ durch zwei projektive Strahleninvolutionen

in halbperspektiver Lage erschöpft, wie aus der Untersuchung des folgenden Paragraphen hervorgeht.

Fassen wir die in § 18 und § 19 gewonnenen Resultate zusammen, so sehen wir, daß eine $C^{(3)}$ dualen Charakters nur auf eine Weise hervortritt und zwar als zweizügige (§ 19, 3), dagegen eine $C^{(3)}$ elliptischen Charakters auf zwei Weisen hervorgeht, beidemal als zweizügige und mit dem Unterschiede, daß das eine Mal die Mittelpunkte der erzeugenden Strahleninvolutionen auf dem paaren Zuge, das andere Mal auf dem unpaaren Zuge angenommen werden (§ 19, 5 und § 19, 2), endlich eine $C^{(3)}$ hyperbolischen Charakters auf zwei Weisen auftritt, einmal als einzügige (§ 18, 2) und zweitens als zweizügige (§ 19, 4). Da in den beiden letzten Fällen den Punkten des unpaaren Zuges hyperbolische Strahleninvolutionen zugehören, von deren Doppelstrahlen entweder der eine oder beide der $C^{(3)}$ in konjugiert-imaginären Punkten begegnen, so ist die zu einer $C^{(3)}$ hyperbolischen Charakters zugehörige $\mathfrak{K}^{(3)}$ entweder dualen oder elliptischen Charakters, niemals hyperbolischen Charakters, wodurch die am Ende von § 15 gemachte Bemerkung bestätigt wird. In den drei übrigen Fällen ist die $\mathfrak{K}^{(3)}$ immer hyperbolischen Charakters, weil reelle Doppelstrahlen in diesen Fällen in reellen Punktepaaren der $C^{(3)}$ begegnen.

§ 20. Untersuchung aller möglichen Fälle bei der Erzeugung einer $C^{(3)}$ durch zwei projektive Strahleninvolutionen in halbperspektiver Lage.

1. Gehen wir umgekehrt, wie in den beiden vorigen Paragraphen, von der Erzeugung einer $C^{(3)}$ durch zwei projektive Strahleninvolutionen in halbperspektiver Lage aus, so treten uns zunächst drei Möglichkeiten entgegen, nämlich

α) beide erzeugende Strahleninvolutionen sind elliptisch,

β) die eine ist elliptisch, die andere hyperbolisch,

γ) beide sind hyperbolisch.

Wir wenden nunmehr die Hilfsbetrachtung an, welche bereits in § 18, 3 auseinander gesetzt ist, indem wir die projektive Abhängigkeit der beiden erzeugenden Strahleninvolutionen $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ durch die Punkte $\mathfrak{x}$ einer Geraden l vermitteln und die Strahleninvolutionen selbst auf zwei einfache Strahlbüschel $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ reduzieren vermittelst eines Hilfskegelschnitts $K^{(2)}$, welcher durch $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ geht und die Tangenten der $C^{(3)}$ in diesen Punkten berührt; die Punkte $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ müssen dann auf der Verbindungslinie $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ liegen und entweder innerhalb oder außerhalb des Kegelschnitts $K^{(2)}$, je nachdem die Strahleninvolutionen $[\mathfrak{O}_1]$ und $[\mathfrak{O}_2]$ elliptisch oder hyperbolisch sind.

Irgend ein Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden l liefert dann zwei entsprechende Strahlen $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{x}|$ und $|\mathfrak{C}_2\mathfrak{x}|$, welche $K^{(2)}$ in den Punktepaaren $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_1'$ und $\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_2'$ schneiden, und die Strahlenpaare

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{y}_1|, \; |\mathfrak{O}_1\mathfrak{y}_1'| \text{ und } |\mathfrak{O}_2\mathfrak{y}_2|, \; |\mathfrak{O}_2\mathfrak{y}_2'|$$

sind entsprechende Strahlenpaare der beiden erzeugenden Strahleninvolutionen. Entspricht einem Doppelstrahl der einen Involution ein reelles Strahlenpaar der andern, so sind die beiden Schnittpunkte desselben mit dem ersteren die Berührungspunkte zweier reellen Tangenten, welche vom Mittelpunkte der zweiten Involution an die Kurve gehen.

2. Dies vorausgeschickt nehmen wir nun den ersten Fall an, daß die beiden erzeugenden Strahleninvolutionen elliptisch sind, dann liegen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ beide innerhalb des Hilfskegelschnitts $K^{(2)}$. Jeder Strahl durch $\mathfrak{C}_1$, wie auch durch $\mathfrak{C}_2$, begegnet dem $K^{(2)}$ in zwei reellen, getrennt voneinander liegenden Punkten; es giebt daher weder aus $\mathfrak{O}_1$ noch aus $\mathfrak{O}_2$ reelle Tangenten an die erzeugte $C^{(3)}$, diese muß daher eine zweizügige sein, und die Mittelpunkte der erzeugenden Strahleninvolutionen $\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2$ müssen auf dem paaren Zuge derselben liegen. Wir erhalten ferner nur reelle Strahlenpaare in den beiden erzeugenden Strahleninvolutionen, die einander entsprechen. Zwei solche

$$x_1x_1' \text{ und } x_2x_2'$$

schneiden sich in vier Punkten, die zwei Paare konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ liefern, nämlich

$$(x_1 x_2) = \mathfrak{p}_1, \quad (x_1 x_2') = \mathfrak{q}_1,$$
$$(x_1' x_2') = \mathfrak{p}_2, \quad (x_1' x_2) = \mathfrak{q}_2.$$

Da nun $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ auf dem paaren Zuge der Kurve liegen, so müssen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ auf verschiedenen Zügen der Kurve liegen; nehmen wir also an, $\mathfrak{p}_1$ liegt auf dem paaren, so muß $\mathfrak{q}_1$ auf dem unpaaren liegen, folglich trifft $|\mathfrak{O}_2 \mathfrak{q}_1|$ die $C^{(3)}$ in $\mathfrak{p}_2$, einem Punkte des paaren Zuges, und $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{p}_2|$ in $\mathfrak{q}_2$, einem Punkte des unpaaren Zuges; es liegen also die konjugierten Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ beide auf dem paaren, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ beide auf dem unpaaren Zuge. Weil die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2|$ und ebenso auch die Verbindungslinie $|\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2|$ allemal die $C^{(3)}$ in einem Punkte des unpaaren Zuges treffen muß und für einen solchen Punkt diese Verbindungslinie ein Doppelstrahl der zugehörigen Strahleninvolution ist, so sind die zu sämtlichen Punkten des unpaaren Zuges zugehörigen Strahleninvolutionen hyperbolisch; einem Punkte des paaren Zuges muß aber immer eine elliptische Strahleninvolution zugehören, weil die Verbindungslinie zweier konjugierten Punkte der $C^{(3)}$ in diesem Falle niemals ihren dritten Schnittpunkt auf dem paaren Zuge haben kann. Wir haben also hier den in § 19, 5 beschriebenen Fall vor uns.

3. Ist von den beiden erzeugenden Strahleninvolutionen die eine $[\mathfrak{O}_1]$ elliptisch und die andere $[\mathfrak{O}_2]$ hyperbolisch, so liegt $\mathfrak{C}_1$ innerhalb und $\mathfrak{C}_2$ außerhalb des Hilfskegelschnitts $K^{(2)}$; die beiden reellen Tangenten aus $\mathfrak{C}_2$ an $K^{(2)}$ haben zwei Berührungspunkte, welche mit $\mathfrak{O}_2$ verbunden die Doppelstrahlen der zugehörigen Strahleninvolution liefern. Schneiden dieselben die vermittelnde Gerade l in

$$\mathfrak{s}_2 \text{ und } \mathfrak{s}_2',$$

und verbinden wir den innerhalb $K^{(2)}$ liegenden Punkt $\mathfrak{C}_1$ mit $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_2'$, so schneidet jeder der beiden Strahlen

$$|\mathfrak{C}_1 \mathfrak{s}_2| \text{ und } |\mathfrak{C}_1 \mathfrak{s}_2'|$$

den $K^{(2)}$ in zwei reellen Punkten, welche mit $\mathfrak{O}_1$ verbunden diejenigen Strahlenpaare liefern, die den Doppelstrahlen $|\mathfrak{O}_2 \mathfrak{s}_2|$ und $|\mathfrak{O}_2 \mathfrak{s}_2'|$ entsprechen. Jeder der Doppelstrahlen der Involution $[\mathfrak{O}_2]$ wird daher in zwei reellen Punkten von

dem entsprechenden Strahlenpaar der Involution $[\mathfrak{D}_1]$ geschnitten. Diese beiden Strahlenpaare aus $\mathfrak{D}_1$ sind also vier reelle Tangenten an die $C^{(3)}$. Die erzeugte $C^{(3)}$ ist mithin eine zweizügige und der Punkt $\mathfrak{D}_1$ liegt auf ihrem unpaaren Zuge. Der Punkt $\mathfrak{D}_2$ muß aber auf dem paaren Zuge liegen, weil die Strahleninvolution $[\mathfrak{D}_1]$ keine reellen Doppelstrahlen hat, also auch der Punkt $\mathfrak{D}_2$ keine reellen Tangenten an die $C^{(3)}$ sendet. Die elliptische Strahleninvolution $[\mathfrak{D}_1]$ enthält nur reelle Strahlenpaare, die hyperbolische $[\mathfrak{D}_2]$ reelle, auch konjugiert-imaginäre Strahlenpaare.

Entsprechen sich nun zwei reelle Strahlenpaare

$$x_1 x_1' \text{ und } x_2 x_2',$$

so liefern die vier Schnittpunkte

$$(x_1 x_2) = \mathfrak{p}_1, \quad (x_1 x_2') = \mathfrak{q}_1,$$
$$(x_1' x_2') = \mathfrak{p}_2, \quad (x_1' x_2) = \mathfrak{q}_2$$

zwei Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2$. Da nun $\mathfrak{D}_1$ auf dem unpaaren und $\mathfrak{D}_2$ auf dem paaren Zuge der $C^{(3)}$ liegt, so müssen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ auf verschiedenen Zügen der Kurve liegen; nehmen wir $\mathfrak{p}_1$ auf dem unpaaren Zuge an, so liegt $\mathfrak{q}_2$ auf dem paaren; folglich trifft $|\mathfrak{D}_1 \mathfrak{q}_2|$ die $C^{(3)}$ in $\mathfrak{p}_2$, einem Punkte des paaren Zuges, und $|\mathfrak{D}_2 \mathfrak{p}_2|$ in $\mathfrak{q}_1$, einem Punkte des unpaaren Zuges; die beiden konjugierten Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ und ebenso $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ liegen also immer auf verschiedenen Kurvenzügen. Die Verbindungslinie $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2|$ und ebenso auch die Verbindungslinie $|\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2|$ trifft die $C^{(3)}$ allemal in einem Punkte des paaren Zuges und ist für einen solchen Punkt ein Doppelstrahl der zugehörigen Strahleninvolution. Daher sind die zu sämtlichen Punkten des Zuges zugehörigen Strahleninvolutionen hyperbolisch. Einem Punkte des unpaaren Zuges muß aber immer eine elliptische Strahleninvolution zugehören, weil die Verbindungslinie zweier konjugierten Punkte der $C^{(3)}$ in diesem Falle niemals ihren dritten Schnittpunkt auf dem unpaaren Zuge haben kann. Wir haben also hier den in § 19, 3 beschriebenen Fall vor uns.

4. Sind endlich beide erzeugende Strahleninvolutionen $[\mathfrak{D}_1]$ und $[\mathfrak{D}_2]$ hyperbolisch, so liegen die Punkte $\mathfrak{C}_1$ und

$\mathfrak{C}_2$ beide außerhalb des Hilfskegelschnitts $K^{(2)}$, senden also reelle Tangentenpaare an denselben, deren Berührungspunkte mit $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ bez. verbunden die vier Doppelstrahlen der Involutionen $[\mathfrak{D}_1]$ und $[\mathfrak{D}_2]$ liefern.

Hier werden wir nun mehrere Fälle zu unterscheiden haben je nach der Lage der vermittelnden Geraden l (S. 151), auf welcher diejenigen Gebiete voneinander zu trennen sind, in denen ein Punkt $\mathfrak{x}$ liegt, der mit $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ verbunden solche Strahlen liefert, die $K^{(2)}$ in reellen Punktepaaren begegnen oder nicht.

Gehen nämlich von einem Punkte $\mathfrak{C}$ zwei reelle Tangenten an einen Kegelschnitt $K^{(2)}$ und treffen eine Gerade l in dem Punktepaar $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$, so trennen dieselben auf der Geraden l zwei Gebiete voneinander; in dem einen liegen solche Punkte $\mathfrak{x}$, deren Verbindungsstrahlen mit $\mathfrak{C}$ dem $K^{(2)}$ in zwei reellen Punkten begegnen, in dem andern solche Punkte $\mathfrak{x}$, deren Verbindungsstrahlen mit $\mathfrak{C}$ dem $K^{(2)}$ in keinem reellen Punkt begegnen. Wir wollen diese beiden Gebiete durch die Zeichen $+$ und $-$ voneinander unterscheiden.

Nun kann entweder das $+$Gebiet zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ liegen und das $-$Gebiet außerhalb der Strecke $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$ oder umgekehrt, je nach der Lage der Geraden l zu dem Kegelschnitt $K^{(2)}$. Haben wir aus zwei Punkten $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei reelle Tangentenpaare an $K^{(2)}$, welche in den Punktepaaren

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_1' \text{ und } \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2'$$

der Geraden l begegnen, so haben wir auf derselben zweimal $+$Gebiete und $-$Gebiete, die einander zum Teil decken oder nicht decken, je nach der Lage der Punkte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1', \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_2'$ zueinander, und hier können drei verschiedene Fälle eintreten:

α) jedes der beiden Paare wird durch das andere getrennt;

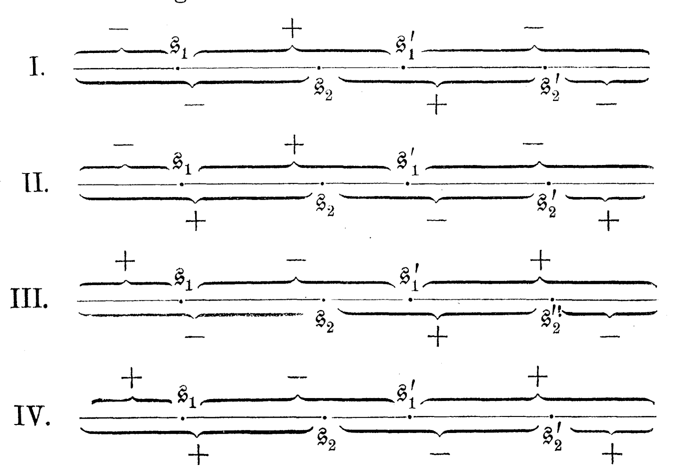
β) das eine Paar liegt ganz innerhalb des andern (d. h. alle Punkte der einen Strecke sind gleichzeitig Punkte der andern, aber nicht umgekehrt);



γ) das eine Paar liegt ganz außerhalb des andern Paares (d. h. die beiden Strecken haben keinen Punkt miteinander gemein).

Da nun ein Punkt $\mathfrak{x}$ in einem $+$Gebiete mit $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{C}_2$ verbunden eine Gerade liefert, die dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ in zwei reellen Punkten begegnet, so werden diese mit $\mathfrak{O}_1$ oder $\mathfrak{O}_2$ verbunden auch reelle Strahlenpaare der beiden Involutionen $[\mathfrak{O}_1]$ oder $[\mathfrak{O}_2]$ liefern, die einander entsprechend sind. Wir können also beurteilen, ob reelle Strahlenpaare einander entsprechen oder konjugiert-imaginäre oder ein reelles einem konjugiert-imaginären oder umgekehrt.

5. Betrachten wir daher den ersten Fall, in welchem jedes des beiden Paare $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_1'$ und $\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_2'$ durch das andere getrennt wird, und bezeichnen wir die $+$ und $-$Gebiete für das erste Paar $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_1'$ oberhalb der Geraden l, für das zweite Paar $\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_2'$ unterhalb der Geraden l, so haben wir im ersten Fall die vier Möglichkeiten:



In allen diesen vier Fällen kommen entsprechende $+$Gebiete zur Deckung; es giebt also immer entsprechende reelle Strahlenpaare der beiden erzeugenden Involutionen. Suchen wir die den Doppelstrahlen der erzeugenden hyperbolischen Involutionen entsprechenden Strahlenpaare auf, so erkennen wir folgendes Verhalten: In I. entspricht:

dem Doppelstrahl	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{s}_1\vert$	ein	imag.	Strahlenpaar	in	$[\mathfrak{O}_2]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{s}_1'\vert$	„	reelles	„	„	$[\mathfrak{O}_2]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{s}_2\vert$	„	„	„	„	$[\mathfrak{O}_1]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{s}_2'\vert$	„	imag.	„	„	$[\mathfrak{O}_1]$.

In II. entspricht:

dem Doppelstrahl	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{s}_1\vert$	ein	reelles	Strahlenpaar	in	$[\mathfrak{O}_2]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{s}_1'\vert$	„	imag.	„	„	$[\mathfrak{O}_2]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{s}_2\vert$	„	reelles	„	„	$[\mathfrak{O}_1]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{s}_2'\vert$	„	imag.	„	„	$[\mathfrak{O}_1]$.

In III. entspricht:

dem Doppelstrahl	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{s}_1\vert$	ein	imag.	Strahlenpaar	in	$[\mathfrak{O}_2]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{s}_1'\vert$	„	reelles	„	„	$[\mathfrak{O}_2]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{s}_2\vert$	„	imag.	„	„	$[\mathfrak{O}_1]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{s}_2'\vert$	„	reelles	„	„	$[\mathfrak{O}_1]$.

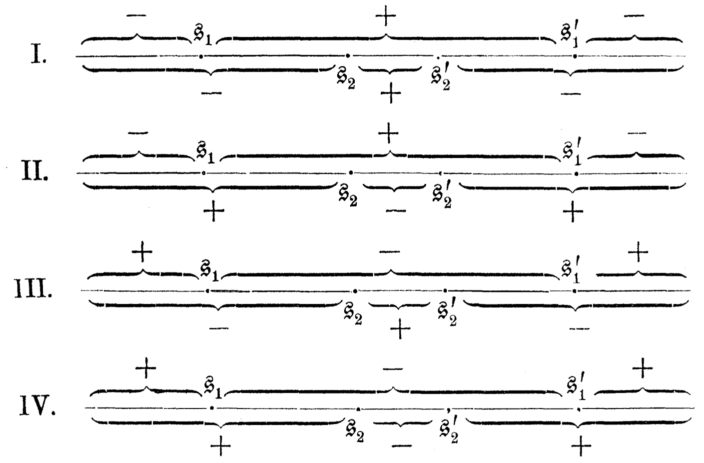
In IV. entspricht:

dem Doppelstrahl	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{s}_1\vert$	ein	reelles	Strahlenpaar	in	$[\mathfrak{O}_2]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{s}_1'\vert$	„	imag.	„	„	$[\mathfrak{O}_2]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{s}_2\vert$	„	„	„	„	$[\mathfrak{O}_1]$,
„ „	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{s}_2'\vert$	„	reelles	„	„	$[\mathfrak{O}_1]$.

Da aber die Durchschnittspunkte eines Doppelstrahles mit jedem der beiden Strahlen des entsprechenden Strahlenpaares die Berührungspunkte des letzteren mit der $C^{(3)}$ sind, so sehen wir, daß in allen vier Fällen (I., II., III., IV.) aus jedem der beiden Mittelpunkte der erzeugenden Strahleninvolutionen nur zwei reelle Tangenten an die $C^{(3)}$ gehen, während die beiden übrigen konjugiert-imaginär sind. Von den Doppelstrahlen jeder der beiden erzeugenden hyperbolischen Strahleninvolutionen schneidet der eine in zwei reellen, der andere in zwei konjugiert-imaginären Punkten die $C^{(3)}$. Wir haben also den in § 18, 2 beschriebenen Fall vor uns.

6. Wir gehen jetzt zu dem zweiten zu untersuchenden Hauptfalle über, daß nämlich das eine Paar $\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_2'$ ganz

innerhalb des andern $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_1'$ gelegen ist. Wir haben hier wiederum vier Möglichkeiten:



In den Fällen I., II., IV. giebt es immer entsprechende +Gebiete, die sich decken, also auch immer reelle entsprechende Strahlenpaare der beiden erzeugenden Involutionen. Nur in dem Falle III. kommen keine solchen vor. Wir erhalten also in diesem Falle überhaupt keine reellen Punkte der $C^{(3)}$, weil immer, wo wir auch den Punkt $\mathfrak{x}$ auf l annehmen mögen, entweder einem reellen Strahlenpaar in $[\mathfrak{O}_1]$ ein konjugiert-imaginäres Strahlenpaar in $[\mathfrak{O}_2]$ oder umgekehrt, oder einem imaginären Strahlenpaar in $[\mathfrak{O}_1]$ wieder ein imaginäres Strahlenpaar in $[\mathfrak{O}_2]$ entspricht. Wir können also diesen Fall als illusorisch ganz fortlassen, weil wir dabei überhaupt keine reellen Punkte der $C^{(3)}$ (außer $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$) erhalten.

Suchen wir jetzt die den Doppelstrahlen der beiden erzeugenden hyperbolischen Involutionen entsprechenden Strahlenpaare auf, so erkennen wir folgendes Verhalten: In I. entspricht:

dem	Doppelstrahl	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{S}_1\vert$	ein	imag.	Strahlenpaar	in $[\mathfrak{O}_2]$,
"	"	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{S}_1'\vert$	"	"	"	" $[\mathfrak{O}_2]$,
"	"	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{S}_2\vert$	"	reelles	"	" $[\mathfrak{O}_1]$,
"	"	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{S}_2'\vert$	"	"	"	" $[\mathfrak{O}_1]$.

In II. entspricht:

dem Doppelstrahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{S}_1|$ ein reelles Strahlenpaar in $[\mathfrak{O}_2]$,
„ „ $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{S}_1'|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_2]$,
„ „ $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{S}_2|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_1]$,
„ „ $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{S}_2'|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_1]$.

In III. entspricht:

dem Doppelstrahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{S}_1|$ ein imag. Strahlenpaar in $[\mathfrak{O}_2]$,
„ „ $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{S}_1'|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_2]$,
„ „ $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{S}_2|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_1]$,
„ „ $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{S}_2'|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_1]$.

In IV. entspricht:

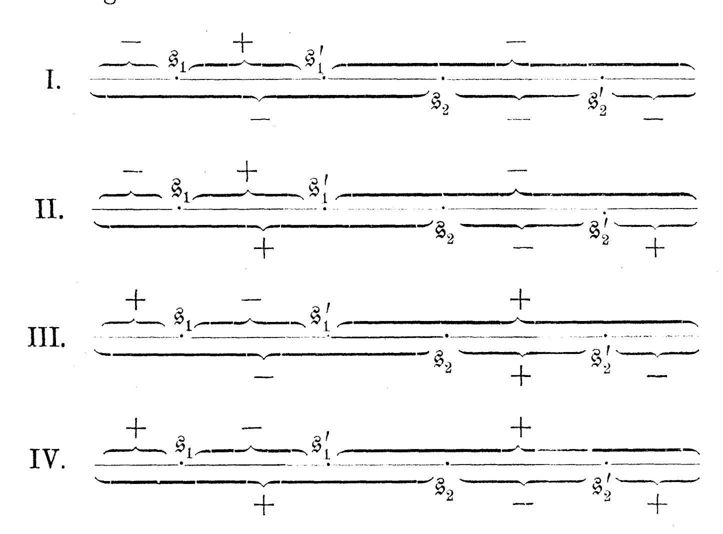
dem Doppelstrahl $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{S}_1|$ ein reelles Strahlenpaar in $[\mathfrak{O}_2]$,
„ „ $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{S}_1'|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_2]$,
„ „ $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{S}_2|$ „ imag. „ „ $[\mathfrak{O}_1]$,
„ „ $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{S}_2'|$ „ „ „ „ $[\mathfrak{O}_1]$.

Wir sehen hieraus, daß in dem Falle I. der Mittelpunkt $\mathfrak{O}_1$ vier reelle Tangenten, der Mittelpunkt $\mathfrak{O}_2$ keine reelle Tangente an die $C^{(3)}$ sendet; im Falle IV. ist es umgekehrt. Die beiden Doppelstrahlen der einen erzeugenden Strahleninvolution begegnen also der $C^{(3)}$ in vier reellen Punkten, die der andern in keinem. Wir haben also den Fall 19, 4 vor uns.

Im Falle II. sendet jeder der beiden Punkte $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ vier reelle Tangenten an die $C^{(3)}$ und jeder der vier Doppelstrahlen der beiden erzeugenden hyperbolischen Involutionen begegnet der $C^{(3)}$ in zwei reellen Punkten. Wir haben also den Fall § 19, 2 vor uns. Der Fall III. ist schon als illusorisch erkannt worden, was auch mit der Bemerkung in § 19, 4 S. 156 übereinstimmt.

7. Es bleibt jetzt nur noch der dritte Hauptfall zu untersuchen übrig, der indessen nichts neues bietet, sondern nur eine Wiederholung des vorigen.

Liegt nämlich das Punktepaar $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_1'$ ganz getrennt von dem Punktepaar $\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_2'$, so daß beide Strecken keinen gemeinschaftlichen Punkt haben, so gestalten sich die Möglichkeiten folgendermaßen:



Hier geht nun der Fall I. als illusorisch heraus, weil überhaupt für keinen Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden l einem reellen Strahlenpaare der Involution $[\mathfrak{O}_1]$ wieder ein reelles Strahlenpaar in $[\mathfrak{O}_2]$ entpricht; wir erhalten also überhaupt keine reellen Punkte der $C^{(3)}$ bei dieser Erzeugung. In den drei übrigen Fällen II., III., IV. giebt es entsprechende $+$Gebiete, die sich decken, also auch reelle entsprechende Strahlenpaare der beiden erzeugenden Involutionen. Suchen wir die den Doppelstrahlen der beiden erzeugenden hyperbolischen Involutionen entsprechenden Strahlenpaare auf, so ergiebt sich folgendes Verhalten:

In I. entspricht:

dem Doppelstrahl $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{S}_1|$ ein imag. Strahlenpaar in $[\mathfrak{O}_2]$,
" " $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{S}_1'|$ " " " " $[\mathfrak{O}_2]$,
" " $|\mathfrak{O}_2 \mathfrak{S}_2|$ " " " " $[\mathfrak{O}_1]$,
" " $|\mathfrak{O}_2 \mathfrak{S}_2'|$ " " " " $[\mathfrak{O}_1]$.

In II. entspricht:

dem Doppelstrahl		$\mid\mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_1\mid$	ein	reelles	Strahlenpaar	in	$[\mathfrak{D}_2]$,
„	„	$\mid\mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_1'\mid$	„	„	„	„	$[\mathfrak{D}_2]$,
„	„	$\mid\mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_2\mid$	„	imag.	„	„	$[\mathfrak{D}_1]$,
„	„	$\mid\mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_2'\mid$	„	„	„	„	$[\mathfrak{D}_1]$.

In III. entspricht:

dem Doppelstrahl		$\mid\mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_1\mid$	ein	imag.	Strahlenpaar	in	$[\mathfrak{D}_2]$,
„	„	$\mid\mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_1'\mid$	„	„	„	„	$[\mathfrak{D}_2]$,
„	„	$\mid\mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_2\mid$	„	reelles	„	„	$[\mathfrak{D}_1]$,
„	„	$\mid\mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_2'\mid$	„	„	„	„	$[\mathfrak{D}_1]$.

In IV. entspricht:

dem Doppelstrahl		$\mid\mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_1\mid$	ein	reelles	Strahlenpaar	in	$[\mathfrak{D}_2]$,
„	„	$\mid\mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_1'\mid$	„	„	„	„	$[\mathfrak{D}_2]$,
„	„	$\mid\mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_2\mid$	„	„	„	„	$[\mathfrak{D}_1]$,
„	„	$\mid\mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_2'\mid$	„	„	„	„	$[\mathfrak{D}_1]$.

Da diese vier Möglichkeiten genau dasselbe Bild darbieten, wie im vorigen Falle (6.), so brauchen wir die Folgerungen daraus nicht zu wiederholen.

Es erübrigt aber noch der Übergangsfälle Erwähnung zu thun, in welchen die beiden Strecken $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2'$ in einem ihrer Endpunkte zusammenstoßen oder mit beiden zusammenfallen. In einem solchen Falle müßte einem Doppelstrahl der einen erzeugenden Involution gerade ein Doppelstrahl der andern entsprechen, und der Schnittpunkt beider müßte daher ein Doppelpunkt der Kurve, die beiden Doppelstrahlen die Tangenten in demselben sein. Eine $C^{(3)}$ mit Doppelpunkt ziehen wir aber hier nicht in den Kreis unserer Betrachtung. Sie tritt nur auf, sobald zwei konjugierte Punkte der $C^{(3)}$ zusammenfallen, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Fallen die beiden Strecken $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2'$ identisch aufeinander, so würde die $C^{(3)}$ zwei Doppelpunkte erhalten und daher ausarten in eine Gerade und einen Kegelschnitt.

Ein Überblick über die gewonnenen Resultate, welche in vollkommener Übereinstimmung sind mit den in §§ 18 und 19 ausgesprochenen, zeigt uns, daß bei der Erzeugung der $C^{(3)}$ durch zwei projektive Strahleninvolutionen in halbperspektiver Lage die einzügige $C^{(3)}$, welche immer hyperbolischen Charakters ist, nur in einer einzigen bestimmten Weise auftritt, die zweizügige, wenn sie elliptischen Charakters ist, auf zwei verschiedene Weisen erzeugt werden kann, wenn sie aber dualen oder hyperbolischen Charakters ist, wieder nur auf eine einzige Weise hervorgeht. Zu diesen Resultaten gelangt auf gänzlich verschiedene Weise auch Herr A. Harnack in seiner Abhandlung: „Über die Verwertung der elliptischen Funktionen in der Geometrie der Kurven dritten Grades“ (Math. Ann. Bd. IX S. 10).*)

§ 21. Zusammenhang zwischen den konischen Polaren von Punkten der $C^{(3)}$.

1. Wir haben in § 9, 6 den Satz kennen gelernt: „Zieht man durch einen Punkt $\mathfrak{A}$ der $C^{(3)}$ Strahlen, deren jeder in einem Paar weiterer Punkte der $C^{(3)}$ begegnet und bestimmt zu $\mathfrak{A}$ den zugeordneten vierten harmonischen Punkt rücksichtlich des Punktepaares, so beschreibt derselbe bei der Drehung des Strahles um $\mathfrak{A}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$, welcher durch $\mathfrak{A}$ selbst hindurchgeht und dieselbe Tangente in $\mathfrak{A}$ hat, wie die $C^{(3)}$. Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ begegnet der $C^{(3)}$ im allgemeinen in vier weiteren Punkten, welche mit $\mathfrak{A}$ verbunden das Tangentenquadrupel aus $\mathfrak{A}$ an die $C^{(3)}$ bilden. Die vier Berührungspunkte liegen eben mit den beiden zusammenfallenden Berührungspunkten der Tangente in $\mathfrak{A}$ auf einem und demselben Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$. Derselbe heißt die konische Polare des Punktes $\mathfrak{A}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$, oder auch die erste Polare von $\mathfrak{A}$.“

Nehmen wir nun einen beliebigen zweiten Punkt $\mathfrak{B}$ der $C^{(3)}$ und bestimmen seine konische Polare $\mathfrak{B}^{(2)}$, so wird die

*) Vergl. auch die Abhandlung von Herrn R. Sturm: Über die ebenen Kurven dritter Ordnung, Borchardt's Journal f. Math. Bd. 90. S. 85ff.

Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ der Kurve in einem dritten Punkte $\mathfrak{C}$ begegnen, und ist $\mathfrak{A}_1$ der vierte zu $\mathfrak{A}$ zugeordnete harmonische Punkt rücksichtlich des Paares $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, ferner $\mathfrak{B}_1$ der vierte zu $\mathfrak{B}$ zugeordnete harmonische Punkt rücksichtlich des Paares $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, also

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = -1,$$
$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}) = -1,$$

dann geht $\mathfrak{A}^{(2)}$ durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}^{(2)}$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$; die gewöhnliche Polare von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{B}^{(2)}$ geht also durch $\mathfrak{C}$, und die Polare von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$ geht auch durch $\mathfrak{C}$, wie aus diesen harmonischen Beziehungen hervorgeht.

Denken wir uns den Strahl $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ unendlich wenig um $\mathfrak{A}$ gedreht, so wird sich $\mathfrak{B}$ nach dem unendlich nahen Punkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}$ nach dem unendlich nahen Punkte $\mathfrak{C}'$ bewegen, sodaß

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'| = t_{\mathfrak{B}}, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{C}'| = t_{\mathfrak{C}}$$

die Tangenten in den Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ der $C^{(3)}$ werden. Wenn wir sodann den vierten harmonischen Punkt zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, der $\mathfrak{A}$ zugeordnet ist, aufsuchen, so wird sich derselbe, $\mathfrak{A}_1'$, unendlich wenig von $\mathfrak{A}_1$ entfernen, sodaß

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'| = t_{\mathfrak{A}_1}$$

die Tangente in $\mathfrak{A}_1$ an der konischen Polare des Punktes $\mathfrak{A}$, d. h. an dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ wird, welcher durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ geht. — Da die beiden harmonischen Punktreihen

$$\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_1'\ \mathfrak{B}'\ \mathfrak{C}'$$

perspektive Lage haben, so müssen sich $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{C}'|$, d. h. die drei Tangenten

$$t_{\mathfrak{B}},\ t_{\mathfrak{C}},\ t_{\mathfrak{A}_1}$$

in einem Punkte schneiden, und umgekehrt, ziehen wir die beiden Tangenten $t_{\mathfrak{B}}$, $t_{\mathfrak{C}}$ in den beiden Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ der $C^{(3)}$, verbinden ihren Schnittpunkt mit $\mathfrak{A}_1$, so ist diese Verbindungslinie die Tangente $t_{\mathfrak{A}_1}$ im Punkte $\mathfrak{A}_1$ der konischen Polare $\mathfrak{A}^{(2)}$. Da der Punkt $\mathfrak{B}$ auf der Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|$ liegt, so wird die Polare von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$ durch den Schnittpunkt

der beiden Tangenten $t_{\mathfrak{A}}$ und $t_{\mathfrak{A}_1}$ gehen müssen, weil $\mathfrak{A}^{(2)}$ durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ geht; bezeichnen wir also den Schnittpunkt:

$$(t_{\mathfrak{A}},\ t_{\mathfrak{A}_1}) = \mathfrak{a},$$

so ist nach der vorigen Bemerkung $|\mathfrak{a}\mathfrak{C}|$ die Polare von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$.

In gleicher Weise konstruieren wir die Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}^{(2)}$. Nachdem wir den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{B}_1$ ermittelt haben durch die Bedingung

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}) = -1$$

und die Tangenten in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ an der $C^{(3)}$

$$t_{\mathfrak{C}}\ t_{\mathfrak{A}}$$

verbinden wir ihren Schnittpunkt mit $\mathfrak{B}_1$; diese Verbindungslinie ist

$$t_{\mathfrak{B}_1},$$

die Tangente in $\mathfrak{B}_1$ an der konischen Polare $\mathfrak{B}^{(2)}$; ist dann der Schnittpunkt der beiden Tangenten

$$(t_{\mathfrak{B}}\, t_{\mathfrak{B}_1}) = \mathfrak{b},$$

so wird $|\mathfrak{b}\mathfrak{C}|$ die gesuchte Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}^{(2)}$ sein.

Nehmen wir nun die drei Schnittpunkte der Geraden $g = |\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ und die drei Tangenten der $C^{(3)}$ in diesen Punkten

$$t_{\mathfrak{A}},\ t_{\mathfrak{B}},\ t_{\mathfrak{C}}$$

und nennen die Schnittpunkte derselben

$$(t_{\mathfrak{B}}\, t_{\mathfrak{C}}) = \mathfrak{A}_2;\quad (t_{\mathfrak{C}}\, t_{\mathfrak{A}}) = \mathfrak{B}_2;\quad (t_{\mathfrak{A}}\, t_{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{C}_2,$$

so bilden die vier Geraden $t_{\mathfrak{A}}$, $t_{\mathfrak{B}}$, $t_{\mathfrak{C}}$, g ein vollständiges Vierseit, dessen drei Diagonalpunkte sind

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{B}\mathfrak{B}_2,\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_2);\quad \mathfrak{y} = (\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}_2);\quad \mathfrak{z} = (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_2).$$

Nun sind bekanntlich

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{y}|,\ |\mathfrak{x}\mathfrak{z}|,\ |\mathfrak{x}\mathfrak{A}|,\ |\mathfrak{x}\mathfrak{A}_2|$$

vier harmonische Strahlen, folglich die vier Durchschnittspunkte derselben mit g vier harmonische Punkte

$$\mathfrak{C},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_1,$$

folglich geht $|\mathfrak{x}\mathfrak{A}_2|$ durch $\mathfrak{A}_1$, und da $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1|$ die Tangente in $\mathfrak{A}_1$ an der konischen Polare $\mathfrak{A}^{(2)}$ ist, so geht dieselbe

auch durch $\mathfrak{x}$; der Punkt $\mathfrak{a} = (t_{\mathfrak{A}}\, t_{\mathfrak{A}_1})$ ist also der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$, nämlich

$$(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}\mathfrak{a}) = -1,$$

und wir haben auch die vier harmonischen Strahlen

$$\mathfrak{C}\,(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}\mathfrak{a}) = -1.$$

In gleicher Weise sind

$$|\mathfrak{y}\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{y}\mathfrak{z}|,\ |\mathfrak{y}\mathfrak{B}|,\ |\mathfrak{y}\mathfrak{B}_2|$$

vier harmonische Strahlen; folglich schneidet $|\mathfrak{y}\mathfrak{B}_2|$ die g in dem vierten harmonischen Punkte $\mathfrak{B}_1$, sodaß

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = -1$$

wird, und $|\mathfrak{y}\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1|$ ist die Tangente in $\mathfrak{B}_1$ an der konischen Polare $\mathfrak{B}^{(2)}$. Der Punkt $\mathfrak{b} = (t_{\mathfrak{B}}\, t_{\mathfrak{B}_1})$ ist also der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2$, nämlich

$$(\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}\mathfrak{b}) = -1,$$

und wir haben auch die vier harmonischen Strahlen

$$\mathfrak{C}\,(\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}\mathfrak{b}) = -1.$$

Aus der Gleichheit

$$\mathfrak{C}\,(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}\mathfrak{a}) = \mathfrak{C}\,(\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}\mathfrak{b})$$

aber, da

$$|\mathfrak{C}\mathfrak{B}_2| \equiv |\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2|,\quad |\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2| \equiv |\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2|,\quad |\mathfrak{C}\mathfrak{A}| \equiv |\mathfrak{C}\mathfrak{B}|$$

ist, folgt endlich

$$|\mathfrak{C}\mathfrak{b}| \equiv |\mathfrak{C}\mathfrak{a}|,$$

d. h. $\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ liegen auf einer und derselben Geraden; also die beiden Geraden $|\mathfrak{C}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{b}|$ fallen identisch zusammen.

Wir haben daher den fundamentalen Satz:

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Punkte der $C^{(3)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ die konischen Polaren derselben, so ist die (gewöhnliche) Polare des Punktes $\mathfrak{A}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{B}^{(2)}$ identisch mit der Polare von $\mathfrak{B}$ in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$.

(Einen speziellen Fall dieses Satzes, nämlich wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ konjugierte Punkte der $C^{(3)}$ sind, haben wir bereits in § 9, 7 S. 70 kennen gelernt.)

2. Wenn wir von den drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, in welchen die Gerade g der $C^{(3)}$ begegnet, die konischen Polaren $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ herstellen, und die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$ einen gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{S}$ haben, so schneide

die Gerade	$\mid \mathfrak{S}\mathfrak{A} \mid$	die	$C^{(3)}$	noch	in	$\mathfrak{A}'$	und	$\mathfrak{A}''$,
„ „	$\mid \mathfrak{S}\mathfrak{B} \mid$	„	„	„	„	$\mathfrak{B}'$	„	$\mathfrak{B}''$,
„ „	$\mid \mathfrak{S}\mathfrak{C} \mid$	„	„	„	„	$\mathfrak{C}'$	„	$\mathfrak{C}''$;

dann müssen, weil $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ auf einer Geraden liegen, die sechs Punkte $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ auf einem Kegelschnitt liegen (§ 9, 5). Für diesen Kegelschnitt sind $\mathfrak{S}$ und g Pol und Polare, weil $\mathfrak{S}$ sowohl auf der konischen Polare $\mathfrak{A}^{(2)}$, als auch auf der konischen Polare $\mathfrak{B}^{(2)}$ liegt; folglich müssen auch $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ durch $\mathfrak{S}$ und g harmonisch getrennt werden und daher muß $\mathfrak{S}$ auch auf der konischen Polare $\mathfrak{C}^{(2)}$ liegen; dies gilt für jeden der vier gemeinschaftlichen Punkte der beiden konischen Polaren $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$. Wir sprechen somit den Satz aus:

Wenn eine Gerade g der $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ begegnet, so gehören die drei konischen Polaren von denselben, $\mathfrak{A}^{(2)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \mathfrak{C}^{(2)}$, einem Kegelschnittbüschel an, d. h. haben dieselben vier gemeinsamen Grundpunkte.

Dieser Satz gilt allgemein, unabhängig von der Realität der Grundpunkte $\mathfrak{S}$, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht:

Sei $\mathfrak{X}$ ein beliebiger Punkt der $C^{(3)}$ und $\mathfrak{X}^{(2)}$ seine konische Polare, dann ist nach dem in 1. bewiesenen Satze die Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{X}^{(2)}$ identisch mit der Polare a von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$, ebenso die Polare von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{X}^{(2)}$ identisch mit der Polare b von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{B}^{(2)}$ und endlich die Polare von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{X}^{(2)}$ identisch mit der Polare c von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{C}^{(2)}$. Da nun die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ auf einer Geraden g liegen, so müssen ihre drei Polaren a, b, c nach $\mathfrak{X}^{(2)}$ sich in einem Punkte schneiden

$$(abc) = \mathfrak{X}_1,$$

und es müssen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ konjugierte Punkte für $\mathfrak{A}^{(2)}, \mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ gleichzeitig sein. Hiernach müssen entweder $\mathfrak{A}^{(2)}, \mathfrak{B}^{(2)}$,

$\mathfrak{C}^{(2)}$ einem Büschel angehören, in welchem Falle dann zu jedem Punkte der Ebene die drei Polaren nach $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ sich in einem Punkte schneiden; oder es gehören $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ nicht einem Büschel an, dann bestimmen $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ ein Kegelschnittnetz, für welches nur besondere Punkte der Ebene, welche die Tripelkurve erfüllen, diese Eigenschaft besitzen. $C^{(3)}$ müßte also die Tripelkurve dieses Netzes sein und $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$ ein Paar konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ (§ 7). Die letztere Annahme ist aber unstatthaft. Denn unter Festhaltung der Bezeichnung in 1. ist die Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$ die Tangente $t_{\mathfrak{A}} = |\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$, die Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}^{(2)}$, wie wir gesehen haben, die Gerade $|\mathfrak{C}\mathfrak{b}\mathfrak{a}|$ und ebenso die Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}^{(2)}$ die Gerade $|\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{a}|$; also schneiden sich auch die drei Polaren von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ in einem Punkte $\mathfrak{a}$. Es sind demgemäß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$, ebenso $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{c}$ konjugierte Punkte für die $C^{(3)}$. Da aber $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf einer Geraden liegen, so müßten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ein Tripel der Tripelkurve $C^{(3)}$ bilden und auf derselben liegen. Andererseits sind aber $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die drei Tangentialpunkte zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und müßten also, da diese auf einer Geraden liegen, ebenfalls auf einer Geraden liegen. Drei Tripelpunkte liegen aber im allgemeinen niemals auf einer Geraden; dies wird also bei willkürlicher Annahme der Geraden g nicht eintreten, und es folgt daraus, daß die von uns gemachte Annahme unstatthaft ist, mithin die drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ einem Büschel angehören müssen.

3. Das Büschel der drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ schneidet auf der Geraden g die drei Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

aus, welche einer Punktinvolution angehören. Dies ist auch an sich erkennbar, denn aus den drei Bedingungen

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1) = -1,$$

durch welche die Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ bestimmt werden, folgt durch bekannte Umformung

$$\begin{array}{l}(\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1) = 2 \\ (\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}) = -1 \\ \hline (\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1) = -2 \\ (\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = 3,\end{array}$$

ferner aus

$$\begin{array}{l}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1) = 3 \\ (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = -1 \\ \hline (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1) = -3\end{array}$$

und in gleicher Weise zwei analoge Beziehungen

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = (\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1) = (\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = -3,$$

woraus hervorgeht, daß von den drei Punktepaaren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

jedes durch das andere getrennt wird, weil der Wert ihres Doppelverhältnisses negativ ist.

Ferner folgt aus

$$\begin{array}{ll}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = -1 & (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = -1 \\ (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}) = -\frac{1}{3} & (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}) = -\frac{1}{3} \\ \hline (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}) = +\frac{1}{3} & (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}) = +\frac{1}{3},\end{array}$$

also

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1),$$

woraus hervorgeht, daß die drei Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

einer Involution angehören und zwar einer elliptischen Punktinvolution, weil jedes Paar durch ein anderes getrennt wird.

Die beiden Doppelpunkte $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1$ dieser elliptischen Punktinvolution sind konjugiert-imaginär. Eine solche Gruppe von fünf Punkten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{J},\ \mathfrak{J}_1$$

nennt man ein äquianharmonisches System; ein solches zeigt wegen der harmonischen Eigenschaft der Doppelpunkte

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = (\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = (\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1) = -1$$

die drei Projektivitäten

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1) \barwedge (\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1) \barwedge (\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1);$$

denn weil $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ sowohl $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ als auch $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1$ harmonisch trennt, so sind $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die Doppelpunkte einer Involution, von der

$\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1$ zwei Paare konjugierter Punkte sind; also haben wir

$$1)\qquad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{J}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{J}_1),$$

ebenso

$$2)\qquad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{J}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{J}_1)$$

und

$$3)\qquad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{J}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{J}_1);$$

aus 1) und 3) folgt aber

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{J}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{J}_1) = (\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{J})$$

oder

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{J}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{J})$$

u. s. f.

Wir erkennen hieraus, daß wenn wir aus den drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ eine cyklische Projektivität herstellen, indem wir den Träger als doppelt auffassen und den drei Punkten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}$$

entsprechen lassen

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{A}$$

oder, was daraus folgt,

$$\mathfrak{C},\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},$$

alsdann die beiden cyklisch-projektiven Punktreihen die konjugiert-imaginären Doppelpunkte

$$\mathfrak{J},\ \mathfrak{J}_1$$

haben.

Ein äquianharmonisches System von fünf Punkten kommt also überein mit einer cyklischen Projektivität, und wir können den Satz aussprechen:

Wenn man aus drei reellen Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ einer Geraden eine cyklische Projektivität herstellt, indem man den Träger als doppelt auffaßt und den Punkten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}$$

die Punkte

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{A}$$

oder

$$\mathfrak{C},\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B}$$

entsprechen läßt, wobei durch drei Paare entsprechender Elemente die projektive Beziehung

festgelegt wird, dann sind die Doppelpunkte $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1$ der projektiven Punktreihen konjugiert-imaginär und werden bestimmt als die konjugiert-imaginären Doppelpunkte einer elliptischen Punktinvolution, welcher die drei Punktepaare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ angehören, wo $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ die vierten harmonischen Punkte

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1) = -1$$

bedeuten.

Wollen wir die Werte der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{J}) \text{ und } (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{J}_1)$$

berechnen, so findet sich aus

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = -3, \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{J}) \,.\, (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}\mathfrak{B}_1) = -3,$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{J}) = -3 \,.\, (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{J}),$$
$$= -3 \,.\, (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{J}),$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{J})^2 = -3.$$

Nehmen wir

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{J}) = +\sqrt{-3},$$

so folgt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \,.\, (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{J}) = +\sqrt{-3},$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{J}) = -\sqrt{-3},$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}) = 1 + \sqrt{-3},$$
$$\underline{(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1) = \tfrac{1}{2}}$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{J}) = \frac{1+\sqrt{+3}}{2},$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{J}) = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

und in gleicher Weise

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{J}_1) = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Die Werte der beiden Doppelverhältnisse $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{J})$ und $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{J}_1)$ gehen also als die imaginären dritten Wurzeln aus der negativen Einheit hervor.

4. Der Zusammenhang zwischen den Punkten

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{J}\mathfrak{J}_1$$

läßt noch ein weiteres Resultat erkennen.

Aus der Gleichheit

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = -1 = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$$

folgt eine Punktinvolution, der die Punktepaare angehören

$$\mathfrak{J}\mathfrak{C},\ \mathfrak{J}_1\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1,$$

mithin

$$\begin{aligned}(\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}) &= (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{J}_1),\\ &= (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{J}_1),\\ &= (\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}),\end{aligned}$$

andererseits auch

$$\begin{aligned}(\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}) &= (\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{J}_1),\\ &= (\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}\mathfrak{B}),\end{aligned}$$

also ist

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}) = (\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{B})$$

und in gleicher Weise finden wir

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}) = (\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{C}),$$

also haben wir die cyklischen Projektivitäten

$$(\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \barwedge (\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \barwedge (\mathfrak{A}_1\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}),$$

und hieraus folgt, daß $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ als die Doppelpunkte für eine cyklische Projektivität auftreten, welche durch die drei Elemente $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1$ bestimmt wird. Wären also $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}_1$ reell, so müßten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ konjugiert-imaginär sein und würden durch eine reell konstruierbare elliptische Punktinvolution vertreten.

Wir wollen jetzt umgekehrt $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ vertreten lassen durch eine gegebene Punktinvolution, unabhängig davon, ob dieselbe hyperbolisch oder elliptisch ist, und dann die zugehörigen Punkte $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1$ konstruieren oder vielmehr durch eine reell konstruierte Punktinvolution vertreten lassen, welche entweder elliptisch oder hyperbolisch sein wird.

Sei außer dem reellen Punkt $\mathfrak{A}$ auf g eine Punktinvolution gegeben, deren (reelle oder konjugiert-imaginäre) Doppelpunkte $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ seien; da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ harmonisch getrennt werden, so ist $\mathfrak{A}_1$ der zu $\mathfrak{A}$ konjugierte

Punkt in dieser gegebenen Punktinvolution; sie wird vollständig bestimmt durch ein zweites gegebenes Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, also die beiden Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$$

bestimmen sie und es gilt die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{B}).$$

Die Involution, deren Doppelpunkte $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1$ sind, wird bestimmt durch die beiden Punktepaare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, welche der Bedingung genügen

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = -3.$$

Sei nun der zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Punkt in dieser zweiten Involution $\mathfrak{P}_1$ genannt, also

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1\mathfrak{B}_1),$$

dann folgt aus den vorigen beiden die Beziehung

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{B}_1)$$

und, da

$$\underline{(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = -3}$$

ist,

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'\mathfrak{B}_1) = -3\ (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{B}_1)$$

oder

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1) = -3.$$

Diese Beziehung liefert uns den gesuchten Zusammenhang zwischen $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}_1$; wir können sie auch so schreiben

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1) = -3\ (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{P}'),$$

dann zeigt sie den Zusammenhang zwischen derjenigen Punktinvolution, welche durch die Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \text{ und } \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$$

bestimmt wird (deren Doppelpunkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind), und derjenigen Involution, welche durch die Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \text{ und } \mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$$

bestimmt wird (deren Doppelpunkte $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_1$ sind). Es geht nun aus der Beziehung hervor, daß, wenn die eine Involution hyperbolisch ist, die andere elliptisch sein muß und umgekehrt.

Es ergiebt sich auch eine leichte Konstruktion der einen Involution, sobald die andere gegeben ist; $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ ist das gemeinschaftliche Paar konjugierter Punkte für beide Involutionen; die zu $\mathfrak{P}$ in der einen und andern Involution konjugierten Punkte sind $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}_1$.

Die Beziehung

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1) = -3$$

läßt sich so schreiben

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1) = 4$$

und vermittelst eines Hilfspunktes $\mathfrak{Q}$

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{A}_1\mathfrak{Q}) \,.\, (\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_1) = 2\,.\,2.$$

Wir können dann über den Hilfspunkt $\mathfrak{Q}$ so verfügen, daß

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{A}_1\mathfrak{Q}) = 2 \text{ und } (\mathfrak{A}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_1) = 2,$$

also

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}) = -1 \text{ und } (\mathfrak{A}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1) = -1$$

wird. Aus diesen harmonischen Beziehungen ist es leicht, z. B. $\mathfrak{P}_1$ zu konstruieren, sobald $\mathfrak{P}'$ gegeben ist: Man suche zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{P}'$ den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{Q}$, sodaß

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}) = -1$$

wird, und zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}'$ wieder den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{P}_1$, sodaß

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1) = -1$$

wird; dann ist $\mathfrak{P}_1$ der gesuchte Punkt derart, daß durch die Punktepaare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ diejenige Involution bestimmt wird, deren Doppelpunkte $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1$ sind.

Im umgekehrten Fall, wenn $\mathfrak{P}_1$ gegeben ist, werden wir $\mathfrak{P}'$ vermittelst des Hilfspunktes $\mathfrak{Q}_1$ aus den Beziehungen konstruieren

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1) = -1 \text{ und } (\mathfrak{A}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}') = -1;$$

es tritt dabei nur $\mathfrak{A}_1$ an die Stelle von $\mathfrak{A}$.

Dies ist denn auch in Übereinstimmung mit dem früheren Resultat; in dem einen Falle operiert man mit $\mathfrak{A}$ und den Punkten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (oder der sie vertretenden Involution), in dem andern Falle mit $\mathfrak{A}_1$ und den Punkten $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_1$ (oder der

sie vertretenden Involution) in gleicher Weise vermittelst cyklischer Projektivität.*

§ 22. Die konischen Polaren für alle Punkte der Ebene rücksichtlich der $C^{(3)}$.

1. Nach dieser Abschweifung über das äquianharmonische System und cyklisch-projektive Punktreihen, wovon wir später noch Gebrauch machen werden, kehren wir zur Betrachtung der konischen Polaren zurück und erweitern die erlangten Resultate.**

Wir haben gesehen, daß zu den drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, in welchen eine Gerade g der $C^{(3)}$ begegnet, drei bestimmte Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$ gehören, die konischen Polaren der Punkte, und daß diese einem Kegelschnittbüschel angehören. Wir können nun die Punkte der Geraden g und die Kegelschnitte des Büschels als Elemente zweier projektiven Gebilde einander entsprechen lassen und die projektive Beziehung derselben durch diese drei Paare entsprechender Elemente festsetzen, wodurch die projektive Beziehung gerade bestimmt wird. Dann wird jedem Punkte $\mathfrak{P}$ der Geraden g ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ des Kegelschnittbüschels eindeutig entsprechen, welchen wir die konische Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ nennen wollen. Die projektive Beziehung beider Gebilde können wir in gleicher Weise, wie in § 4, 5 herstellen, indem wir das Kegelschnittbüschel auf ein Strahlbüschel reduzieren (gebildet von den Polaren eines beliebigen festen Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels) und dieses Strahlbüschel auf die von $\mathfrak{P}$ beschriebene gerade Punktreihe projektiv beziehen. Dies vorausgeschickt nehmen wir auf der Geraden $g = |\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ und nennen die Polaren von $\mathfrak{A}$ nach

* Vergl. H. Schröter: „Zur Konstruktion eines äquianharmonischen Systems“ (Math. Annalen, Bd. X S. 240).

** Siehe A. Milinowski: „Zur synthetischen Behandlung der ebenen Kurven dritter Ordnung“ (Schlömilchs Zeitschrift für Math. u. Phys., 21. Jahrg. S. 427 flg.).

$$\mathfrak{A}^{(2)},\ \mathfrak{B}^{(2)},\ \mathfrak{C}^{(2)},\ \mathfrak{P}^{(2)}$$

bez.

$$a,\quad b,\quad c,\quad p,$$

welche ein Strahlbüschel bilden, projektiv mit dem Kegelschnittbüschel $\mathfrak{A}^{(2)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \mathfrak{C}^{(2)}, \mathfrak{P}^{(2)}$. Nennen wir andererseits die Polaren der Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{P}$$

nach dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ bez.

$$a,\ b',\ c',\ p',$$

so bilden auch diese ein Strahlbüschel, projektiv mit der Punktreihe $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}$. Da nun Punktreihe und Kegelschnittbüschel selbst projektiv zueinander sind, so folgt

$$(abcp) \barwedge (ab'c'p');$$

es ist aber nach unserem fundamentalen Satze § 21, 1

$$b \equiv b',\ c \equiv c',$$

folglich ist auch

$$p \equiv p',$$

d. h.:

Die Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist identisch mit der Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$.

Nehmen wir weiter zwei beliebige Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ der Geraden g und nennen ihre konischen Polaren $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{Q}^{(2)}$, so werden die Polaren von $\mathfrak{P}$ nach

$$\mathfrak{A}^{(2)},\ \mathfrak{B}^{(2)},\ \mathfrak{C}^{(2)},\ \mathfrak{P}^{(2)},\ \mathfrak{Q}^{(2)}$$

bez.

$$a,\quad b,\quad c,\quad p,\quad q$$

ein Strahlbüschel bilden, welches mit dem Kegelschnittbüschel $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}\mathfrak{P}^{(2)}\mathfrak{Q}^{(2)}$ projektiv ist, und die Polaren der Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{P},\ \mathfrak{Q}$$

nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ bez.

$$a',\ b',\ c',\ p,\ q'$$

werden ein Strahlbüschel bilden, welches mit der Punktreihe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ projektiv ist. Da nun Punktreihe und Kegelschnittbüschel selbst projektiv zueinander sind, so folgt

$$(abcpq) \barwedge (a'b'c'p\,q').$$

Nach dem vorigen Satze ist aber

$$a \equiv a', \; b \equiv b', \; c \equiv c',$$

folglich muß auch

$$q \equiv q'$$

sein, d. h.:

Die Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$ ist identisch mit der Polare von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ in der Ebene und ziehen durch ihn eine Gerade g, welche der $C^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ begegnet, wählen sodann einen beliebigen Punkt $\mathfrak{X}$ der $C^{(3)}$ aus und konstruieren die konischen Polaren $\mathfrak{A}^{(2)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \mathfrak{C}^{(2)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \mathfrak{X}^{(2)}$, so gehören

$$\mathfrak{A}^{(2)}, \; \mathfrak{B}^{(2)}, \; \mathfrak{C}^{(2)}, \; \mathfrak{P}^{(2)}$$

einem Büschel von Kegelschnitten an, in Bezug auf welche die Polaren von $\mathfrak{X}$ seien

$$a, \; b, \; c, \; p,$$

die ein Strahlbüschel bilden, projektiv mit dem Kegelschnittbüschel $\mathfrak{A}^{(2)} \mathfrak{B}^{(2)} \mathfrak{C}^{(2)} \mathfrak{P}^{(2)}$.

Nehmen wir andererseits von

$$\mathfrak{A}, \; \mathfrak{B}, \; \mathfrak{C}, \; \mathfrak{P}$$

die Polaren nach $\mathfrak{X}^{(2)}$ bez.

$$a', \; b', \; c', \; p',$$

so bilden diese ein Strahlbüschel, projektiv mit der Punktreihe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$. Da aber Kegelschnittbüschel und Punktreihe selbst projektiv zueinander sind, so folgt

$$(abcp) \barwedge (a'b'c'p');$$

es ist aber nach dem Fundamentalsatz (§ 21, 1)

$$a \equiv a', \; b \equiv b', \; c \equiv c',$$

folglich ist auch

$$p \equiv p',$$

d. h.:

Die Polare von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist identisch mit der Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{X}^{(2)}$.

Halten wir jetzt den Punkt $\mathfrak{P}$ fest, ziehen aber durch ihn eine andere Gerade g_1, welche der Kurve $C^{(3)}$ in den

Punkten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ begegnet, so könnte die konische Polare von $\mathfrak{P}$ in gleicher Weise für diese Gerade g_1 konstruiert, möglicherweise ein anderer Kegelschnitt $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ werden. Die Polare von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ müßte aber wieder identisch werden mit der Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{X}^{(2)}$, und da diese ungeändert bleibt, so müßte $\mathfrak{X}$ dieselbe Polare haben für beide verschieden angenommene Kegelschnitte $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{P}_1^{(2)}$. Dies gilt aber für jeden Punkt $\mathfrak{X}$ der $C^{(3)}$, was nicht anders möglich ist, als wenn die Kegelschnitte $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ selbst identisch sind. Wir haben also den Satz gefunden:

Für alle durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ in der Ebene gezogenen Strahlen $q, q_1, q_2 \ldots$, welche in den Punktetripeln $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2, \ldots$ der $C^{(3)}$ begegnen, ist die in der oben angedeuteten Weise konstruierte konische Polare immer ein und derselbe Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$. Die konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ des beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ in der Ebene ist also unabhängig von dem durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Strahle $g = |\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$.

3. Die konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ eines Punktes $\mathfrak{P}$ in der Ebene ist vollständig bestimmt, sobald es durch $\mathfrak{P}$ eine Gerade g giebt, welche der $C^{(3)}$ in drei reellen Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ begegnet. Ob es aber durch einen willkürlich in der Ebene angenommenen Punkt $\mathfrak{P}$ immer solche Gerade g giebt, bleibt dahingestellt. Wir können uns vermittelst des vorigen Satzes in folgender Weise helfen:

Nehmen wir drei beliebige Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ der $C^{(3)}$, die nicht auf einer Geraden liegen, und konstruieren die drei konischen Polaren

$$\mathfrak{A}^{(2)}, \quad \mathfrak{B}^{(2)}, \quad \mathfrak{C}^{(2)},$$

so ist, wie wir wissen, die Polare von

$\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$ identisch mit der von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$,
$\mathfrak{P}$ „ $\mathfrak{B}^{(2)}$ „ „ „ „ $\mathfrak{B}$ „ $\mathfrak{P}^{(2)}$,
$\mathfrak{P}$ „ $\mathfrak{C}^{(2)}$ „ „ „ „ $\mathfrak{C}$ „ $\mathfrak{P}^{(2)}$;

sei nun a die Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$,
b „ „ „ $\mathfrak{P}$ „ $\mathfrak{B}^{(2)}$,
c „ „ „ $\mathfrak{P}$ „ $\mathfrak{C}^{(2)}$,

so sind mit $\mathfrak{P}$ auch a, b, c gegeben und für den zu suchenden Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ müssen

$$\mathfrak{A} \text{ und } a, \quad \mathfrak{B} \text{ und } b, \quad \mathfrak{C} \text{ und } c$$

Pole und Polaren sein, wodurch $\mathfrak{P}^{(2)}$ schon mehr als bestimmt ist (Th. d. Keg. S. 433).

Wir erreichen dasselbe Ziel auch auf folgende Art:

Nehmen wir drei beliebige Gerade g_1, g_2, g_3, die nicht durch denselben Punkt gehen, aber die Eigenschaft besitzen, daß jede der $C^{(3)}$ in drei reellen Punkten begegnet

$$g_1 = |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|,$$
$$g_2 = |\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2|,$$
$$g_3 = |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3|.$$

Bestimmen wir von diesen neun reellen Punkten die konischen Polaren

$$\mathfrak{A}_1^{(2)}, \mathfrak{B}_1^{(2)}, \mathfrak{C}_1^{(2)}, \mathfrak{A}_2^{(2)}, \mathfrak{B}_2^{(2)}, \mathfrak{C}_2^{(2)}, \mathfrak{A}_3^{(2)}, \mathfrak{B}_3^{(2)}, \mathfrak{C}_3^{(2)}$$

und ziehen durch den gegebenen Punkt $\mathfrak{P}$ eine beliebige Gerade g, welche g_1, g_2, g_3 in den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ trifft, dann müssen die konischen Polaren dieser drei Punkte

$$\mathfrak{P}_1^{(2)}, \mathfrak{P}_2^{(2)}, \mathfrak{P}_3^{(2)}$$

drei Kegelschnitte sein, die einem Büschel angehören und projektiv entsprechen den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ der geraden Punktreihe auf g. Aus diesem Büschel nehmen wir jetzt den einzigen völlig bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$, welcher der Projektivität genügt

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3) \barwedge (\mathfrak{P}^{(2)}\mathfrak{P}_1^{(2)}\mathfrak{P}_2^{(2)}\mathfrak{P}_3^{(2)})$$

und dadurch gefunden ist.

Die vorige Behauptung, auf welche wir uns stützen, daß $\mathfrak{P}_1^{(2)}, \mathfrak{P}_2^{(2)}, \mathfrak{P}_3^{(2)}$ einem Kegelschnittbüschel angehören, ergiebt sich nämlich so:

Da die konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ eines Punktes $\mathfrak{P}$ unabhängig von der durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Geraden g ist, so gilt der fundamentale Satz, welcher früher nur für zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ einer Geraden g erhärtet war, die in den reellen Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die $C^{(3)}$ schneidet, jetzt allgemein:



Sind irgend zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in der Ebene gegeben und $\mathfrak{P}^{(2)}$, $\mathfrak{Q}^{(2)}$ ihre konischen Polaren, so ist die Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$ identisch mit der Polare von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$.

Nehmen wir nun drei Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ auf einer beliebigen Geraden g irgendwie an und sind ihre konischen Polaren $\mathfrak{P}_1^{(2)}$, $\mathfrak{P}_2^{(2)}$, $\mathfrak{P}_3^{(2)}$; ist ferner $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Punkt der Ebene und $\mathfrak{Q}^{(2)}$ seine konische Polare, so wird die Polare von

$\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$ identisch mit der von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{P}_1^{(2)}$,
$\mathfrak{P}_2$ „ $\mathfrak{Q}^{(2)}$ „ „ „ „ $\mathfrak{Q}$ „ $\mathfrak{P}_2^{(2)}$,
$\mathfrak{P}_3$ „ $\mathfrak{Q}^{(2)}$ „ „ „ „ $\mathfrak{Q}$ „ $\mathfrak{P}_3^{(2)}$;

seien diese drei Geraden p_1, p_2, p_3, so schneiden sie sich als Polaren von drei Punkten einer Geraden g in Bezug auf denselben Kegelschnitt $\mathfrak{Q}^{(2)}$ in einem Punkte, und daher haben auch die drei Kegelschnitte $\mathfrak{P}_1^{(2)}$, $\mathfrak{P}_2^{(2)}$, $\mathfrak{P}_3^{(2)\prime}$ die Eigenschaft, daß für jeden Punkt $\mathfrak{Q}$ in der Ebene seine drei Polaren sich in einem Punkte schneiden; daraus folgt aber, daß die drei Kegelschnitte $\mathfrak{P}_1^{(2)}$, $\mathfrak{P}_2^{(2)}$, $\mathfrak{P}_3^{(2)}$ einem Büschel angehören müssen.

Wir können also jetzt den Satz allgemein aussprechen:

Die konischen Polaren zu sämtlichen Punkten $\mathfrak{P}$ einer beliebigen Geraden g bilden ein Kegelschnittbüschel mit denselben vier reellen oder paarweise konjugiert-imaginären Grundpunkten.

4. Wir nennen die vier Grundpunkte dieses zu der Geraden g gehörigen Kegelschnittbüschels die Pole der Geraden g rücksichtlich der $C^{(3)}$, und können mit dieser Bezeichnung den vorhin bewiesenen Satz (2.), welcher die Unabhängigkeit der konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ des Punktes $\mathfrak{P}$ von der durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Geraden g ausspricht, so formulieren:

Für alle Geraden g, die durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{P}$ gehen, liegen die je vier Pole rücksichtlich der $C^{(3)}$ auf einem und demselben Kegelschnitt, nämlich auf der konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ des Punktes $\mathfrak{P}$.

Fallen insbesondere von den Schnittpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ einer durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Geraden g zwei zusammen,

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C},$$

d. h. wird der durch $\mathfrak{P}$ gezogene Strahl g eine Tangente der $C^{(3)}$, so fällt von ihren vier Polen offenbar einer nach $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$, denn der Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ geht durch $\mathfrak{A}_1$, welcher Punkt in diesem Falle mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zusammenfällt, und der Kegelschnitt $\mathfrak{B}^{(2)}$ geht auch durch $\mathfrak{B}$, folglich geht auch die konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ durch jeden Berührungspunkt einer aus $\mathfrak{P}$ an die $C^{(3)}$ gelegten Tangente, und da der Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ die $C^{(3)}$ im allgemeinen in sechs Punkten schneidet, so erhalten wir den Satz:

Aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}$ der Ebene gehen im allgemeinen sechs Tangenten an die $C^{(3)}$; ihre sechs Berührungspunkte liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$, der konischen Polare des Punktes $\mathfrak{P}$.

Liegt der Punkt $\mathfrak{P}$ insbesondere auf der $C^{(3)}$ selbst, so fallen zwei von den sechs Tangenten in die eine Tangente für $\mathfrak{P}$ selbst hinein und es bleiben nur noch vier weitere Tangenten übrig, was der frühere von uns erörterte Fall ist.

§ 23. Die konischen und die geraden Polaren rücksichtlich der $C^{(3)}$ von den Punkten der Ebene.

1. Wir haben gesehen, daß zu jedem Punkte $\mathfrak{P}$ der Ebene ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ gehört, seine konische Polare rücksichtlich der $C^{(3)}$, die reell konstruiert werden kann. Nehmen wir von demselben Punkte $\mathfrak{P}$ die gewöhnliche Polare in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ und nennen diese Gerade

$$p$$

die gerade Polare von $\mathfrak{P}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$ oder die zweite Polare des Punktes $\mathfrak{P}$, so stehen diese drei zusammengehörigen Elemente

$$\mathfrak{P},\ \mathfrak{P}^{(2)},\ p$$

in enger Verbindung miteinander, die wir jetzt näher untersuchen wollen. Liegt $\mathfrak{P}$ insbesondere auf der $C^{(3)}$ selbst,



so ist seine gerade Polare p die Tangente in $\mathfrak{P}$ an der $C^{(3)}$.

Nehmen wir auf der Geraden p einen beliebigen Punkt $\mathfrak{Q}$ an, dessen konische Polare $\mathfrak{Q}^{(2)}$ sei, dann sind offenbar $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ konjugierte Punkte rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{P}^{(2)}$, also muß die Polare von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ durch $\mathfrak{P}$ gehen. Nach dem Fundamentalsatz (§ 22, 3) ist aber die Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$ identisch mit der Polare von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$, also muß auch die Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$ durch $\mathfrak{P}$ gehen; wenn aber die Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$ durch $\mathfrak{P}$ selbst geht, so muß $\mathfrak{P}$ ein Punkt des Kegelschnitts $\mathfrak{Q}^{(2)}$ sein und die Polare von $\mathfrak{P}$ die Tangente an $\mathfrak{Q}^{(2)}$ in diesem Punkte, also gilt der Satz:

Wird auf der geraden Polare p eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$ irgend ein Punkt $\mathfrak{Q}$ angenommen, so geht seine konische Polare $\mathfrak{Q}^{(2)}$ allemal durch den anfänglichen Punkt $\mathfrak{P}$.

Nehmen wir andererseits auf der konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ eines Punktes $\mathfrak{P}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{Q}$ an, dessen konische Polare $\mathfrak{Q}^{(2)}$ sei, dann wird, weil $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt, die Polare von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ durch $\mathfrak{Q}$ selbst gehen, nämlich die Tangente in $\mathfrak{Q}$ am Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ sein. Da aber die Polare von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ identisch ist mit der Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$, so liegt $\mathfrak{Q}$ auch auf der Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$. Die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind daher konjugierte Punkte für den Kegelschnitt $\mathfrak{Q}^{(2)}$, also muß $\mathfrak{P}$ auf der Polare von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$, d. h. auf der geraden Polare q liegen, und wir erhalten den Satz:

Wird auf der konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$ irgend ein Punkt $\mathfrak{Q}$ angenommen, so geht die gerade Polare q desselben allemal durch den anfänglichen Punkt $\mathfrak{P}$.

Hiernach läßt sich zu einer gegebenen konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ derjenige Punkt $\mathfrak{P}$ ermitteln, dessen konische Polare die gegebene ist; wir brauchen nur auf $\mathfrak{P}^{(2)}$ zwei beliebige Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ anzunehmen und deren gerade Polaren

q und q' zu konstruieren, um ihren Schnittpunkt $(qq') = \mathfrak{P}$ zu finden.

Wir können den vorletzten Satz auch umkehren:

Nehmen wir auf einer Geraden p zwei Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ an, so müssen ihre konischen Polaren $\mathfrak{Q}^{(2)}$ und $\mathfrak{Q}_1^{(2)}$ durch denjenigen Punkt gehen, dessen gerade Polare p ist. Da sich aber die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{Q}^{(2)}$ und $\mathfrak{Q}_1^{(2)}$ im allgemeinen in vier Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ schneiden, so muß für jeden derselben p die gerade Polare sein; wir schließen also:

Eine beliebige Gerade p in der Ebene besitzt die Eigenschaft, daß für jeden ihrer vier Pole die gerade Polare diese Gerade p ist.

2. Gehen wir von drei beliebigen Punkten

$$\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{P}_3$$

der Ebene aus, die nicht auf einer Geraden liegen, und bestimmen die konischen Polaren derselben

$$\mathfrak{P}_1^{(2)},\ \mathfrak{P}_2^{(2)},\ \mathfrak{P}_3^{(2)},$$

nehmen sodann einen beliebigen vierten Punkt $\mathfrak{X}$ der Ebene und seine konische Polare $\mathfrak{X}^{(2)}$, so werden die beiden Geraden

$$|\,\mathfrak{X}\mathfrak{P}_1\,| \text{ und } |\,\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\,|$$

sich in einem Punkte $\mathfrak{Y}$ schneiden, dessen konische Polare $\mathfrak{Y}^{(2)}$ sowohl dem Kegelschnittbüschel angehört, welches durch die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{X}^{(2)}$ bestimmt wird, als auch dem Kegelschnittbüschel, welches durch die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{P}_2^{(2)}$ und $\mathfrak{P}_3^{(2)}$ bestimmt wird, weil die drei konischen Polaren von drei Punkten einer Geraden immer einem Kegelschnittbüschel angehören (§ 22, 4). Wir können demnach zu dem Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ so gelangen von den drei gegebenen Kegelschnitten aus

$$\mathfrak{P}_1^{(2)},\ \mathfrak{P}_2^{(2)},\ \mathfrak{P}_3^{(2)},$$

daß wir aus dem Büschel $[\mathfrak{P}_2^{(2)}\mathfrak{P}_3^{(2)}]$ einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{Y}^{(2)}$ herausnehmen, ihn mit $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ zur Bildung eines neuen veränderlichen Kegelschnittbüschels $[\mathfrak{P}_1^{(2)}\mathfrak{Y}^{(2)}]$ zusam-

menstellen und aus diesem Büschel den Kegelschnitt $\mathfrak{X}^{(2)}$ herausnehmen.

Aus dieser Bildungsweise erkennen wir nach § 7:

Die konischen Polaren zu sämtlichen Punkten der Ebene bilden ein Kegelschnittnetz, die konischen Polaren zu den Punkten einer Geraden ein Kegelschnittbüschel, welches dem Netze angehört, und je zwei Kegelschnittbüschel des Netzes haben einen gemeinschaftlichen Kegelschnitt, nämlich die konische Polare desjenigen Punktes, in welchem sich die beiden Geraden schneiden, deren Punkte die Kegelschnitte der beiden Büschel zu konischen Polaren haben.

3. Wenn wir von allen Punkten $\mathfrak{Q}$ einer Geraden p die konischen Polaren $\mathfrak{Q}^{(2)}$ aufsuchen, so bilden dieselben, wie wir wissen, ein Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten. In diesem Kegelschnittbüschel giebt es im allgemeinen drei Linienpaare; suchen wir insbesondere diejenigen drei ausgezeichneten Punkte der Geraden p

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3$$

auf, deren konische Polaren in Linienpaare ausarten, und bezeichnen diese Linienpaare

$$\mathfrak{Q}_1^{(2)} = [l_1 l_1'], \quad \mathfrak{Q}_2^{(2)} = [l_2 l_2'], \quad \mathfrak{Q}_3^{(2)} = [l_3 l_3'].$$

Die Doppelpunkte (Schnittpunkte) der drei Linienpaare seien

$$(l_1 l_1') = \mathfrak{q}_1, \quad (l_2 l_2') = \mathfrak{q}_2, \quad (l_3 l_3') = \mathfrak{q}_3$$

und bilden ein gemeinsames Polardreieck (selbstkonjugiertes Dreieck) für alle Kegelschnitte des Büschels.

Da nun nach unserm Fundamentalsatz die Polare von $\mathfrak{Q}_1$ nach dem Kegelschnitt $[l_2 l_2']$ identisch ist mit der Polare von $\mathfrak{Q}_2$ nach dem Kegelschnitt $[l_1 l_1']$, die erstere aber durch den Punkt $\mathfrak{q}_2$, die letztere durch den Punkt $\mathfrak{q}_1$ gehen muß, so ist sie die Verbindungslinie $|\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2|$, und es müssen daher die vier Strahlen

$|\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{q}_2|, \quad |\mathfrak{q}_2 \mathfrak{q}_1|, \quad l_2, \quad l_2'$ vier harmonische Strahlen,

$|\mathfrak{Q}_2 \mathfrak{q}_1|, \quad |\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2|, \quad l_1, \quad l_1'$ vier harmonische Strahlen sein.



Ferner bilden die Punkte $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks, dessen drei Seitenpaare $l_1 l_1'$, $l_2 l_2'$, $l_3 l_3'$ sind; folglich muß der vierte harmonische Strahl zu $l_1 l_1'$ und der Diagonale $|\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2|$, letzterer zugeordnet, durch $\mathfrak{q}_3$ gehen, also müssen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_3, \mathfrak{Q}_2$$

auf einer Geraden liegen, ebenso

$$\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \mathfrak{Q}_1$$

auf einer Geraden, und in gleicher Weise erkennen wir, daß auch

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{Q}_3$$

auf einer Geraden liegen müssen; da nun aber auch $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ auf der Geraden p liegen, so bilden diese drei Punktepaare $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{Q}_2 \mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{Q}_3 \mathfrak{q}_3$ die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits, und die gesuchten Punkte $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ sind dadurch gefunden als die drei Durchschnittspunkte der Geraden p mit den drei Seiten des Diagonaldreiecks $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, welches das gemeinsame Polardreieck des Kegelschnittbüschels ist, gebildet von den konischen Polaren der Punkte von p.

Wir sprechen demgemäß folgenden Satz aus:

Diejenigen drei Punkte einer Geraden, deren konische Polaren in Linienpaare ausarten, bilden mit den drei Doppelpunkten der drei Linienpaare die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, indem je zwei der letzteren mit einem der ersteren auf je einer Geraden liegen. Die zu einem solchen Punkte der Geraden zugehörige Gegenecke des vollständigen Vierseits ist der Doppelpunkt der ausgearteten konischen Polare.

Oder wir können uns auch so ausdrücken:

Die drei Diagonalen des von den vier Polen einer Geraden p gebildeten vollständigen Vierecks treffen diese Gerade p in solchen drei Punkten deren konische Polaren in Linienpaare ausarten.

Wir bemerken noch, weil

$$|\mathfrak{q}_1 \mathfrak{Q}_2|, \quad |\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2|, \quad l_1, \quad l_1'$$

vier harmonische Strahlen sind und

$$|\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2| \equiv |\mathfrak{q}_1 \mathfrak{Q}_3|$$

ist, folgt der Satz:

Die drei besonderen Punkte $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ auf der Geraden p, deren konische Polaren in Linienpaare $l_1 l_1'$, $l_2 l_2'$, $l_3 l_3'$ zerfallen, liegen derartig auf dieser Geraden p, daß

$\mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_3$ durch das Linienpaar $l_1 l_1'$,
$\mathfrak{Q}_3 \mathfrak{Q}_1$ „ „ „ $l_2 l_2'$,
$\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2$ „ „ „ $l_3 l_3'$

harmonisch getrennt werden.

4. Wir suchen jetzt umgekehrt zu den Punkten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, den Doppelpunkten der drei in Linienpaare ausgearteten konischen Polaren, selbst ihre konischen Polaren

$$\mathfrak{q}_1^{(2)}, \quad \mathfrak{q}_2^{(2)}, \quad \mathfrak{q}_3^{(2)}$$

auf. Da die gerade Polare von $\mathfrak{Q}_1$, d. h. die Polare von $\mathfrak{Q}_1$ rücksichtlich des Linienpaares $l_1 l_1'$ durch $\mathfrak{q}_1$ geht, so muß die konische Polare $\mathfrak{q}_1^{(2)}$ durch den Punkt $\mathfrak{Q}_1$ gehen (1.); ferner sind $\mathfrak{q}_1$ und $|\mathfrak{q}_2 \mathfrak{q}_3|$ Pol und Polare für alle Kegelschnitte des Büschels von konischen Polaren sämtlicher Punkte $\mathfrak{Q}$ der Geraden p. Nun ist nach unserem Fundamentalsatz die Polare von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{q}_1^{(2)}$ identisch mit der Polare von $\mathfrak{q}_1$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$, d. h. mit der Geraden $|\mathfrak{q}_2 \mathfrak{q}_3 \mathfrak{Q}_1| = q_1$; also muß der noch unbekannte, durch $\mathfrak{Q}_1$ gehende Kegelschnitt $\mathfrak{q}_1^{(2)}$ die Eigenschaft besitzen, daß für alle Punkte $\mathfrak{Q}$ der durch $\mathfrak{Q}_1$ gehenden Geraden p die Polaren in eine und dieselbe Gerade q_1 zusammenfallen. Dies ist nicht anders möglich, als wenn der Kegelschnitt $\mathfrak{q}_1^{(2)}$ in ein Linienpaar ausartet, welches in $\mathfrak{Q}_1$ seinen Doppelpunkt hat und harmonisch getrennt wird durch die Geraden p und q_1. Wir haben also das Resultat gewonnen:

Wenn die konische Polare eines Punktes $\mathfrak{Q}_1$ in ein Linienpaar ausartet, dessen Doppelpunkt $\mathfrak{q}_1$ ist,

so muß auch die konische Polare von $\mathfrak{q}_1$ in ein Linienpaar ausarten, dessen Doppelpunkt $\mathfrak{Q}_1$ ist.

Da nun die sämtlichen konischen Polaren $\mathfrak{X}^{(2)}$ aller Punkte $\mathfrak{X}$ der Ebene ein Kegelschnittnetz bilden (2.) und die Doppelpunkte der in Linienpaare ausartenden Kegelschnitte eines Netzes auf einer Kurve dritter Ordnung liegen (§ 5, 4), so folgt:

Diejenigen Punkte in der Ebene einer $C^{(3)}$, deren konische Polaren in Linienpaare ausarten, sowie auch die Doppelpunkte dieser Linienpaare liegen sämtlich auf einer neuen Kurve dritter Ordnung $H^{(3)}$, welche die Hessesche Kurve von der gegebenen $C^{(3)}$ genannt wird.

Die umgekehrte Aufgabe, wenn ein Netz von Kegelschnitten gegeben ist, zu jedem derselben denjenigen Punkt zu finden, dessen konische Polare er sein soll, d. h. ein gegebenes Kegelschnittnetz als ein Netz konischer Polaren herzustellen, wird so gelöst:

Wir dürfen drei in Linienpaare ausgeartete Kegelschnitte des Netzes

$$[l_1 l_1'] = \mathfrak{A}_1^{(2)}, \quad [l_2 l_2'] = \mathfrak{A}_2^{(2)}, \quad [l_3 l_3'] = \mathfrak{A}_3^{(2)},$$

welche nicht die drei Seitenpaare eines und desselben vollständigen Vierecks sind, als zur Bestimmung des Netzes notwendig und hinreichend, willkürlich annehmen. Es würden dann die drei Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ zu ermitteln sein, deren konische Polaren die gegebenen Linienpaare $\mathfrak{A}_1^{(2)}$, $\mathfrak{A}_2^{(2)}$, $\mathfrak{A}_3^{(2)}$ sind.

Bezeichnen wir die Schnittpunkte

$$(l_1 l_1') = \mathfrak{a}_1, \quad (l_2 l_2') = \mathfrak{a}_2, \quad (l_3 l_3') = \mathfrak{a}_3,$$

die Verbindungslinien

$$|\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3| = s_1, \quad |\mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_1| = s_2, \quad |\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2| = s_3,$$

die vierten harmonischen Strahlen $s_1' t_1'$, $s_2' t_2'$, $s_3' t_3'$:

$$(l_1 l_1' \, s_2 s_2') = -1, \quad (l_2 l_2' \, s_3 s_3') = -1, \quad (l_3 l_3' \, s_1 s_1') = -1,$$
$$(l_1 l_1' \, s_3 t_3') = -1, \quad (l_2 l_2' \, s_1 t_1') = -1, \quad (l_3 l_3' \, s_2 t_2') = -1,$$

so muß, wie wir wissen, die Polare von $\mathfrak{A}_1$ nach $\mathfrak{A}_2^{(2)}$ identisch sein mit der Polare von $\mathfrak{A}_2$ nach $\mathfrak{A}_1^{(2)}$; sie geht aber

notwendig, weil beide Kegelschnitte Linienpaare sind, sowohl durch $\mathfrak{a}_2$ als auch durch $\mathfrak{a}_1$, ist folglich die Gerade s_3 und ihr Pol nach $\mathfrak{A}_2^{(2)}$, d. h. der Punkt $\mathfrak{A}_1$ liegt auf der vierten Harmonischen s_3', ihr Pol nach $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ liegt auf der vierten Harmonischen t_3', also

$\mathfrak{A}_1$ liegt auf s_3', $\mathfrak{A}_2$ liegt auf t_3';

ebenso folgt:

$\mathfrak{A}_2$ liegt auf s_1', $\mathfrak{A}_3$ liegt auf t_1',
$\mathfrak{A}_3$ „ „ s_2', $\mathfrak{A}_1$ „ „ t_2',

folglich sind die drei Punkte

$$\mathfrak{A}_1 = (s_3' t_2'), \quad \mathfrak{A}_2 = (s_1' t_3'), \quad \mathfrak{A}_3 = (s_2' t_1')$$

gefunden.

Wir können jetzt zu jedem beliebigen Kegelschnitt des Netzes $\mathfrak{X}^{(2)}$ denjenigen Punkt $\mathfrak{X}$ finden, dessen konische Polare $\mathfrak{X}$ ist; da die Polare von $\mathfrak{A}_1$ nach $\mathfrak{X}^{(2)}$ bekannt ist und identisch mit der Polare von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{A}_1^{(2)}$, so ist ihr Pol $\mathfrak{X}$ nach dem bekannten Kegelschnitt $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ auf der vierten harmonischen zu der bekannten Geraden rücksichtlich des Linienpaares $l_1 l_1'$ gelegen, ebenso für $\mathfrak{A}_2^{(2)}$; der Durchschnittspunkt beider vierten Harmonischen ist also der gesuchte Pol $\mathfrak{X}$.

Auch umgekehrt läßt sich zu jedem Punkte $\mathfrak{X}$ die konische Polare $\mathfrak{X}^{(2)}$ aus dem Netze herstellen.

(Vergl. die von Cremona in der Abhandlung: „Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane“ [Annali di Matematica pura ed applicata tom. VII N. 4] gegebene Lösung dieses Problems.)

Wollen wir die Punkte der Fundamentalkurve $C^{(3)}$ ermitteln, für welche das gegebene Kegelschnittnetz das Netz der konischen Polaren ist, so werden wir für irgend ein in dem Netze enthaltenes Büschel von Kegelschnitten die Punkte bestimmen, deren konische Polaren die Kegelschnitte des Büschels sind. Diese Punkte liegen auf einer Geraden g und bilden eine gerade Punktreihe, die projektiv ist mit dem Kegelschnittbüschel. Die drei incidenten Elemente der beiden projektiven Gebilde auf der Geraden g sind die drei Punkte der Fundamentalkurve $C^{(3)}$ auf dieser Geraden.

5. Wir erkennen leicht, daß für die Hessesche Kurve $H^{(3)}$ die Punktepaare $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ und $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ und $\mathfrak{q}_3$ konjugierte Punkte in dem früheren Sinne sind (§ 2, 5), denn $\mathfrak{q}_1$ und $|\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3\mathfrak{Q}_1|$ sind Pol und Polare für das ganze Büschel von Kegelschnitten, welches dem Netze angehört und aus den konischen Polaren der Punkte von der Geraden p besteht; ferner geht die Polare von $\mathfrak{q}_1$ in Bezug auf den dem Netze angehörenden Kegelschnitt $q_1^{(2)}$, der in ein Linienpaar mit dem Doppelpunkt $\mathfrak{Q}_1$ ausartet, auch durch den Punkt $\mathfrak{Q}_1$, also sind $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ konjugierte Punkte für drei nicht demselben Büschel angehörende Kegelschnitte des Netzes, mithin für sämtliche Kegelschnitte desselben, d. h. konjugierte Punkte für die $H^{(3)}$. Wir können also dem vorigen dies neue Resultat hinzufügen:

Wenn für einen Punkt $\mathfrak{Q}_1$ in der Ebene der $C^{(3)}$ die konische Polare in ein Linienpaar mit dem Doppelpunkt $\mathfrak{q}_1$ ausartet, so sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ ein Paar konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve $H^{(3)}$, welche von sämtlichen Punkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ erfüllt wird.

Aus einem Paar konjugierter Punkte der $H^{(3)}$ lassen sich in bekannter Weise unendlich viele weitere Paare derselben ableiten. Für jedes solche Paar gilt nun auch der umgekehrte Satz:

Jedes Paar konjugierter Punkte der $H^{(3)}$ besitzt die Eigenschaft, daß der eine dieser Punkte zur konischen Polare rücksichtlich der $C^{(3)}$ ein Linienpaar hat, dessen Doppelpunkt der andere ist.

6. Diejenigen besonderen Punkte der Kurve $C^{(3)}$, deren konische Polaren in Linienpaare ausarten, müssen nach dem Vorigen gleichzeitig auf der Kurve $H^{(3)}$ liegen, also die Durchschnittspunkte der beiden Kurven $C^{(3)}$ und $H^{(3}$ sein, deren Anzahl im allgemeinen neun ist. Diese Punkte haben eine besondere Eigentümlichkeit. Nennen wir $\mathfrak{W}$ einen solchen Punkt der $C^{(3)}$, dessen konische Polare in ein Linienpaar zerfällt, so muß die Tangente $t_{\mathfrak{W}}$ der $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{W}$, weil sie auch die konische Polare in $\mathfrak{W}$ berührt, entweder

ein Teil derselben sein, oder $\mathfrak{W}$ muß der Doppelpunkt des Linienpaares sein, in welches $\mathfrak{W}^{(2)}$ ausartet. Letzteres ist aber nicht der Fall, denn jeder durch den Doppelpunkt des Linienpaares gehende Strahl kann keinen weiteren Punkt desselben enthalten. Durch $\mathfrak{W}$ gehen aber offenbar unendlich viele Strahlen, welche noch andere Punkte von $\mathfrak{W}^{(2)}$ enthalten; also muß $t_{\mathfrak{W}}$ ein Teil des Linienpaares sein, und alle übrigen Punkte von $\mathfrak{W}^{(2)}$ müssen auf dem andern Teil des Linienpaares, d. h. auf einer Geraden liegen. Nennen wir diese Gerade w, dann ist die konische Polare

$$\mathfrak{W}^{(2)} = [t_{\mathfrak{W}}\, w].$$

Die Gerade w schneidet nun im allgemeinen die $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$, $\mathfrak{w}_3$; der Punkt $\mathfrak{W}$ sendet aber im allgemeinen ein Tangentenquadrupel an die $C^{(3)}$, von dem $|\mathfrak{W}\mathfrak{w}_1|$, $|\mathfrak{W}\mathfrak{w}_2|$, $|\mathfrak{W}\mathfrak{w}_3|$ drei Tangenten sind, die vierte muß daher ihren Berührungspunkt auf $t_{\mathfrak{W}}$, dem andern Teile des Linienpaares haben; $t_{\mathfrak{W}}$ berührt $C^{(3)}$ selbst in $\mathfrak{W}$; der dritte Schnittpunkt von $t_{\mathfrak{W}}$ kann nicht von $\mathfrak{W}$ verschieden sein, denn sonst müßte, wenn er $\mathfrak{W}'$ wäre, $|\mathfrak{W}\mathfrak{W}'|$ auch Tangente in $\mathfrak{W}'$ sein, also $t_{\mathfrak{W}}$ Doppeltangente, was widersinnig ist; es muß also $\mathfrak{W}'$ in $\mathfrak{W}$ hineinfallen, folglich $t_{\mathfrak{W}}$ eine Wendetangente sein, welche die $C^{(3)}$ in drei zusammenfallenden Punkten $\mathfrak{W}$ schneidet, und $\mathfrak{W}$ selbst ein Wendepunkt der $C^{(3)}$. Wir haben also dies Ergebnis:

Wenn für einen Punkt $\mathfrak{W}$ der $C^{(3)}$ die konische Polare in ein Linienpaar ausarten soll, so muß $\mathfrak{W}$ ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ sein; seine konische Polare zerfällt alsdann in zwei Gerade, von denen eine die Wendetangente $t_{\mathfrak{W}}$ ist und die andere w die harmonische Polare des Wendepunktes genannt wird, nämlich der Ort der vierten harmonischen Punkte auf allen durch $\mathfrak{W}$ gezogenen Strahlen zu $\mathfrak{W}$ zugeordnet, rücksichtlich des übrigen Paares von Schnittpunkten mit der $C^{(3)}$.

Aus dem vorigen Resultat folgt somit:

Eine gegebene Kurve $C^{(3)}$ wird von ihrer Hesseschen Kurve $H^{(3)}$ (d. h. dem Ort der Doppelpunkte

aller in Linienpaare ausgearteten konischen Polaren für die $C^{(3)}$) in den Wendepunkten der $C^{(3)}$ durchschnitten.

Da für den Wendepunkt $\mathfrak{W}$ die konische Polare in das Linienpaar zerfällt, dessen einer Teil $t_{\mathfrak{W}}$ (die Wendetangente) und dessen anderer Teil die Gerade w (die harmonische Polare des Wendepunktes) ist, so wird der Schnittpunkt

$$(t_{\mathfrak{W}}, w) = \mathfrak{W}_1$$

der Doppelpunkt dieses Linienpaares sein, also auch ein Punkt der $H^{(3)}$ sein, und zwar sind (nach 5.) $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}_1$ konjugierte Punkte für die $H^{(3)}$. Es muß also auch die konische Polare von $\mathfrak{W}_1$ in ein Linienpaar zerfallen, dessen Doppelpunkt $\mathfrak{W}$ ist. Die Verbindungslinie $|\mathfrak{W}\mathfrak{W}_1|$ wird nun die $H^{(3)}$ noch in einem dritten Punkte $\mathfrak{W}_2$ schneiden, dessen konische Polare rücksichtlich der $C^{(3)}$ in ein drittes Linienpaar zerfallen muß. Die beiden Linienpaare für $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}_1$ bestimmen aber ein vollständiges Viereck, für dessen drittes Linienpaar der Doppelpunkt der konjugierte Punkt bezüglich der $H^{(3)}$ zum Punkt $\mathfrak{W}_2$ ist. Dieses vollständige Viereck artet selbst aus, indem das dritte Linienpaar mit dem Linienpaar, dessen Doppelpunkt $\mathfrak{W}$ ist, zusammenfällt; also muß auch der konjugierte Punkt zu $\mathfrak{W}$, d. h. der Punkt $\mathfrak{W}_1$ mit $\mathfrak{W}_2$ zusammenfallen; mithin ist die Gerade $|\mathfrak{W}\mathfrak{W}_1|$ die Tangente an der $H^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{W}_1$, wie sie die Tangente der $C^{(3)}$ im Punkte $\mathfrak{W}$ ist. Für die Kurve $H^{(3)}$ ist mithin der Punkt $\mathfrak{W}$ gleichzeitig der Tangentialpunkt und der konjugierte Punkt zu $\mathfrak{W}_1$. Wir haben nun in § 7, 5 gesehen, daß ein solcher Punkt einer Kurve dritter Ordnung, welcher der Tangentialpunkt seines konjugierten Punktes ist, ein Wendepunkt der Kurve sein muß. Hieraus folgt, daß der Punkt $\mathfrak{W}$ zugleich ein Wendepunkt für die Kurve $H^{(3)}$ sein muß, wie er schon ein Wendepunkt für die $C^{(3)}$ ist; also:

Die gegebene $C^{(3)}$ und ihre Hessesche $H^{(3)}$ schneiden sich in solchen neun Punkten, welche für jede derselben die Wendepunkte sind.

Wir können die Hessesche Kurve $H^{(3)}$ wieder als eine gegebene $C_1^{(3)}$ auffassen und dann von ihr die Hessesche Kurve

suchen u. s. f., dann erhalten wir ein ganzes Büschel von Kurven dritter Ordnung, die sämtlich dieselben neun Grundpunkte haben (§ 11) und wir schließen hieraus:

Alle Kurven dritter Ordnung, welche durch die neun Wendepunkte einer $C^{(3)}$ hindurchgehen, haben diese Punkte selbst zu ihren Wendepunkten.

Wir kommen auf ein solches Büschel von Kurven dritter Ordnung, welches ein syzygetisches Büschel genannt wird, noch bei späterer Gelegenheit zurück.

§ 24. Die Polokoniken von den Geraden in der Ebene rücksichtlich der $C^{(3)}$.

1. Wir haben gesehen, daß zu jedem Punkte $\mathfrak{Q}$ in der Ebene nicht bloß eine konische Polare $\mathfrak{Q}^{(2)}$, also ein Kegelschnitt, sondern auch eine gerade Polare q, nämlich die Polare von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{Q}^{(2)}$ gehört.

Suchen wir jetzt zu allen Punkten $\mathfrak{Q}$ einer Geraden p den von ihren geraden Polaren q umhüllten Ort auf. Da die zu den Punkten $\mathfrak{Q}$ der Geraden p gehörigen konischen Polaren $\mathfrak{Q}^{(2)}$, wie wir wissen, ein Kegelschnittbüschel bilden, welches projektiv ist mit der von $\mathfrak{Q}$ beschriebenen geraden Punktreihe auf dem Träger p, so nehmen wir auf p die Punkte

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots$$

an, bestimmen die konischen Polaren derselben

$$\mathfrak{Q}_1^{(2)}, \mathfrak{Q}_2^{(2)}, \mathfrak{Q}_3^{(2)}, \ldots$$

welche einem Kegelschnittbüschel angehören, und nennen

die Polare von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_1^{(2)}$ die gerade Polare q_1,

" " " $\mathfrak{Q}_2$ " $\mathfrak{Q}_2^{(2)}$ " " " q_2,

" " " $\mathfrak{Q}_3$ " $\mathfrak{Q}_3^{(2)}$ " " " q_3

u. s. f.

Ferner wissen wir, daß die Polaren irgend eines Punktes $\mathfrak{Q}$ in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte eines Büschels durch einen festen Punkt $\mathfrak{q}$ laufen und ein einfaches Strahlbüschel beschreiben, projektiv mit dem Kegelschnittbüschel. Wir



nennen $\mathfrak{q}$ den konjugierten Punkt zu $\mathfrak{Q}$ rücksichtlich des Kegelschnittbüschels, weil $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ konjugierte Punkte für sämtliche Kegelschnitte des Büschels sind. Sei also

der zu $\mathfrak{Q}_1$ rücksichtl. des Kegelschnittbüschels konjug. Punkt $\mathfrak{q}_1$,
" " $\mathfrak{Q}_2$ " " " " " $\mathfrak{q}_2$,
" " $\mathfrak{Q}_3$ " " " " " $\mathfrak{q}_3$
u. s. f.

Nennen wir ferner den Pol der Geraden p

rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{Q}_1^{(2)}$ den Punkt $\mathfrak{p}_1$,
" " " $\mathfrak{Q}_2^{(2)}$ " " $\mathfrak{p}_2$,
" " " $\mathfrak{Q}_3^{(2)}$ " " $\mathfrak{p}_3$,
u. s. f.,

dann erfüllen die sämtlichen Punkte $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \ldots$ und $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ einen und denselben Kegelschnitt

$$p^{(2)}$$

den Polarkegelschnitt der Geraden p rücksichtlich des Kegelschnittbüschels der konischen Polaren. Denn nehmen wir von irgend zwei festgehaltenen Punkten $\mathfrak{Q}_i$ und $\mathfrak{Q}_k$ der Geraden p die Polaren rücksichtlich aller Kegelschnitte des Büschels, so erhalten wir zwei projektive Strahlbüschel mit den Mittelpunkten $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}_k$, weil beide Strahlbüschel mit dem Kegelschnittbüschel projektiv sind. Der Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen dieser beiden projektiven Strahlbüschel ist aber ein Punkt $\mathfrak{p}$, der Pol von $p = |\mathfrak{Q}_i\mathfrak{Q}_k|$ in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels; das Erzeugnis der beiden projektiven Strahlbüschel, d. h. der Ort der Punkte $\mathfrak{p}$ ist ein Kegelschnitt $p^{(2)}$, welcher selbst durch $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}_k$ geht, also auch durch sämtliche Punkte $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \ldots$, wodurch die vorige Behauptung erwiesen ist.

2. Nehmen wir nun von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{Q}_i$ der Geraden p die Polare in Bezug auf $\mathfrak{Q}_k^{(2)}$, irgend einen Kegelschnitt des Büschels der konischen Polaren, so muß dieselbe durch $\mathfrak{p}_k$ gehen, weil $\mathfrak{Q}_i$ auf p liegt; sie muß auch durch $\mathfrak{q}_i$ gehen, weil $\mathfrak{q}_i$ der konjugierte Punkt zu $\mathfrak{Q}_i$ rücksichtlich aller Kegelschnitte des Büschels ist, also ist die

Polare von $\mathfrak{Q}_i$ nach $\mathfrak{Q}_k^{(2)}$ die Verbindungslinie $|\mathfrak{q}_i \mathfrak{p}_k|$,

und insbesondere ist die

Polare von $\mathfrak{Q}_i$ nach $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$ die Verbindungslinie $|\mathfrak{q}_i \mathfrak{p}_i|$.

Da aber nach unserm Fundamentalsatze die Polare von $\mathfrak{Q}_i$ nach $\mathfrak{Q}_k^{(2)}$ identisch ist mit der Polare von $\mathfrak{Q}_k$ nach $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$, so muß

$$|\mathfrak{q}_i \mathfrak{p}_k| \equiv |\mathfrak{q}_k \mathfrak{p}_i|$$

sein, und alle vier Punkte müssen auf derselben Geraden liegen; sie müssen aber auch, wie wir gesehen haben, alle vier auf dem Kegelschnitt $p^{(2)}$ liegen, was nicht anders möglich ist, als wenn

$$\mathfrak{q}_i \equiv \mathfrak{p}_i$$
$$\mathfrak{q}_k \equiv \mathfrak{p}_k$$

ist (denn solange $\mathfrak{Q}_i$ und $\mathfrak{Q}_k$ verschieden angenommene Punkte sind, kann nicht $\mathfrak{q}_i$ mit $\mathfrak{q}_k$ identisch sein, auch nicht $\mathfrak{p}_i$ mit $\mathfrak{p}_k$).

Dies ergiebt folgenden Satz:

Der Pol $\mathfrak{p}_i$ der Geraden p in Bezug auf einen Kegelschnitt $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$ des Büschels der konischen Polaren fällt zusammen mit demjenigen Punkt $\mathfrak{q}_i$, welcher der konjugierte Punkt zu $\mathfrak{Q}_i$ ist rücksichtlich des Kegelschnittbüschels (während $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$ die konische Polare zu $\mathfrak{Q}_i$ ist).

Da allgemein die Polare von $\mathfrak{Q}_i$ nach $\mathfrak{Q}_k^{(2)}$ immer die Gerade $|\mathfrak{q}_i \mathfrak{p}_k|$ ist (oder $|\mathfrak{q}_k \mathfrak{p}_i|$), wo $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ beide auf dem Kegelschnitt $p^{(2)}$ liegen, so wird, wenn wir $\mathfrak{Q}_k^{(2)}$ in $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$ übergehen lassen, weil alsdann $\mathfrak{p}_i$ mit $\mathfrak{q}_i$ zusammenfällt, die Gerade $|\mathfrak{p}_i \mathfrak{q}_i|$ in die Tangente am Kegelschnitt $p^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{p}_i$ oder $\mathfrak{q}_i$ übergehen müssen, und wir gelangen zu dem Resultat:

Die Polare q_i eines beliebigen Punktes $\mathfrak{Q}_i$ der Geraden p in Bezug auf die zugehörige konische Polare $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$ ist die Tangente am Kegelschnitt $p^{(2)}$ in demjenigen Punkte $\mathfrak{q}_i$, welcher dem Punkte $\mathfrak{Q}_i$ in Bezug auf das Büschel der konischen Polaren konjugiert ist und der zusammenfällt mit dem Pol der Geraden p in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$.

Wir schließen hieraus:

Die geraden Polaren von sämtlichen Punkten einer geraden Linie p umhüllen einen Kegelschnitt $p^{(2)}$, welcher identisch ist mit dem Polarkegelschnitt der Geraden p rücksichtlich des Kegelschnittbüschels, gebildet von den konischen Polaren der Punkte von p.

Diesen Kegelschnitt $p^{(2)}$ nennt man die Polokonik der Geraden p, weil er alle Pole der Geraden p rücksichtlich des Büschels der konischen Polaren enthält. Die Polokonik geht daher insbesondere durch die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks für alle Kegelschnitte des Büschels. Sie geht ferner durch die beiden besonderen Punkte der Geraden p, in welchen diese von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt wird.

3. Bezeichnen wir die beiden Punkte, in welchen die Gerade p von ihrer Polokonik getroffen wird, durch

$$\mathfrak{Q}_0 \text{ und } \mathfrak{Q}_0',$$

so muß unter den Kegelschnitten des Büschels von konischen Polaren einer vorkommen, für den $\mathfrak{Q}_0$ und p Pol und Polare sind, und da diese incident sind, so muß er in $\mathfrak{Q}_0$ die p berühren; ein zweiter Kegelschnitt des Büschels wird in $\mathfrak{Q}_0'$ die p berühren. Die Polare von $\mathfrak{Q}_0$ in Bezug auf den ersten Kegelschnitt ist p selbst, in Bezug auf den zweiten Kegelschnitt muß sie durch den Berührungspunkt $\mathfrak{Q}_0'$ gehen; der Schnittpunkt beider ist also $\mathfrak{Q}_0'$, d. h. $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{Q}_0'$ sind konjugierte Punkte in Bezug auf das Büschel sämtlicher konischen Polaren. Da nun nach dem in 2. bewiesenen Satze der zu $\mathfrak{Q}_0$ konjugierte Punkt rücksichtlich des Büschels (d. h. der Punkt $\mathfrak{Q}_0'$) der Pol von p sein muß in Bezug auf die konische Polare $\mathfrak{Q}_0^{(2)}$, welche zu $\mathfrak{Q}_0$ gehört, so muß der Kegelschnitt des Büschels, welcher p in $\mathfrak{Q}_0'$ berührt, die konische Polare $\mathfrak{Q}_0^{(2)}$ sein, also haben wir das Ergebnis:

Wenn die Gerade p von ihrer Polokonik $p^{(2)}$ in den beiden Punkten $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{Q}_0'$ getroffen wird, so berührt die konische Polare von $\mathfrak{Q}_0$ die Gerade p in

$\mathfrak{Q}_0'$ und die konische Polare von $\mathfrak{Q}_0'$ berührt die p in $\mathfrak{Q}_0$.

Die Eigenschaft, welche hier bei den beiden besonderen Punkten $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{Q}_0'$ der Polokonik hervortritt, nämlich daß ihre konischen Polaren die Gerade p berühren, gilt, wie leicht zu sehen ist, allgemein von jedem Punkte der Polokonik.

Sei nämlich $\mathfrak{q}_i$ ein beliebiger Punkt der Polokonik, nämlich der konjugierte Punkt zu $\mathfrak{Q}_i$ rücksichtlich des Büschels konischer Polaren, so ist $\mathfrak{q}_i$ identisch mit $\mathfrak{p}_i$, dem Pol von p rücksichtlich der konischen Polare $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$ und die Tangente in $\mathfrak{q}_i\,(\equiv \mathfrak{p}_i)$ ist die gerade Polare q_i von $\mathfrak{Q}_i$.

Um nun von dem Punkte $\mathfrak{q}_i$ die konische Polare

$$\mathfrak{q}_i^{(2)}$$

zu ermitteln, bemerken wir, daß nach dem Fundamentalsatz die Polare von $\mathfrak{Q}_i$ nach $\mathfrak{q}_i^{(2)}$ identisch sein muß mit der Polare von $\mathfrak{q}_i$ nach $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$; nun ist aber $\mathfrak{q}_i \equiv \mathfrak{p}_i$ und die Polare von $\mathfrak{p}_i$ nach $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$ ist die Gerade p, also ist p auch die Polare von $\mathfrak{Q}_i$ nach $\mathfrak{q}_i^{(2)}$. Der Kegelschnitt $\mathfrak{q}_i^{(2)}$ muß aber durch $\mathfrak{Q}_i$ hindurchgehen, weil $\mathfrak{q}_i$ auf der geraden Polare q_i liegt nach dem Satze in § 23, 1, folglich muß p die Tangente im Punkt $\mathfrak{Q}_i$ für den Kegelschnitt $\mathfrak{q}_i^{(2)}$ sein, und wir erhalten den Satz:

Die konischen Polaren $\mathfrak{q}_i^{(2)}$ sämtlicher Punkte $\mathfrak{q}_i$ der Polokonik von p berühren diese Gerade p in denjenigen Punkten, welche zu $\mathfrak{q}_i$ die konjugierten sind rücksichtlich des Büschels konischer Polaren $\mathfrak{Q}_i^{(2)}$, die zu den Punkten von p gehören.

Wir können uns auch so ausdrücken:

Die Polokonik der Geraden p ist der Ort aller derjenigen Punkte, deren konische Polaren die Gerade p berühren.

4. Schneidet die Gerade p die $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, und sind die Tangenten der $C^{(3)}$ in diesen Punkten $t_{\mathfrak{A}}, t_{\mathfrak{B}}, t_{\mathfrak{C}}$, so bilden diese ein Dreiseit $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$ (§ 21, 1) S. 171, welchem die Polokonik $p^{(2)}$ einbeschrieben ist. Die drei Berührungspunkte werden die konjugierten Punkte von

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sein rücksichtlich des Büschels der konischen Polaren von p, also diejenigen Punkte, welche in § 21, 1 mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ bezeichnet wurden, d. h. die vierten harmonischen Punkte zu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ zugeordnet rücksichtlich je zweier Ecken des Dreiseits $t_{\mathfrak{A}} t_{\mathfrak{B}} t_{\mathfrak{C}}$.

Insbesondere ist daher die Polokonik von g_∞ derjenige Kegelschnitt, welcher die Seiten des von den drei Asymptoten der $C^{(3)}$ gebildeten Dreiseits in ihren Mitten berührt.

Nehmen wir eine beliebige Gerade g in der Ebene und ihre Polokonik $g^{(2)}$, außerdem einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ und seine konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$, und möge die Gerade g den Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ in den Punkten

$$\mathfrak{Q} \text{ und } \mathfrak{Q}'$$

treffen, so müssen nach § 21, 1 die geraden Polaren q und q' der Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gehen; diese geraden Polaren sind aber Tangenten der Polokonik $g^{(2)}$, also sehen wir:

Das Tangentenpaar aus irgend einem Punkte $\mathfrak{P}$ an eine beliebige Polokonik $g^{(2)}$ ist ein Paar von geraden Polaren derjenigen beiden Punkte, in welchen die Gerade g die konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ schneidet.

Fallen insbesondere die beiden Punkte $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'$ zusammen, so müssen auch $q = q'$ zusammenfallen, also sehen wir:

Berührt eine Gerade g irgend eine konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ in $\mathfrak{T}$, so geht die Polokonik $g^{(2)}$ durch den Punkt $\mathfrak{P}$, dessen konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist, und die Tangente t der Polokonik in $\mathfrak{P}$ ist die gerade Polare des Berührungspunktes $\mathfrak{T}$.

5. Zerfällt insbesondere die konische Polare $\mathfrak{Q}^{(2)}$ eines Punktes $\mathfrak{Q}$ in ein Linienpaar $[ll'] = \mathfrak{Q}^{(2)}$, dessen Doppelpunkt $\mathfrak{q}$ sei, sodaß also $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ konjugierte Punkte der Hesseschen Kurve $H^{(3)}$ sind (§ 23, 4, 5), und nehmen wir für die vorhin g genannte Gerade eine der beiden l, l', z. B. l, so wird l eine Tangente der konischen Polare $[ll'] = \mathfrak{Q}^{(2)}$ sein, deren Berührungspunkt unbestimmt wird, nämlich jeder Punkt von l sein kann. Die Polokonik von l muß

aber durch $\mathfrak{Q}$ gehen und die geraden Polaren aller Punkte von l müssen in $\mathfrak{Q}$ die Polokonik $l^{(2)}$ berühren. Dies ist nicht anders möglich, als wenn $l^{(2)}$ selbst in ein Linienpaar zerfällt, dessen Doppelpunkt $\mathfrak{Q}$ ist, also:

Wenn eine konische Polare $\mathfrak{Q}^{(2)}$ in ein Linienpaar $l l_1$ ausartet, so sind die Polokoniken $l^{(2)}$, $l_1^{(2)}$ dieser beiden Geraden selbst Linienpaare mit dem gemeinsamen Doppelpunkt $\mathfrak{Q}$, dessen konische Polare $[l l_1]$ ist.

Aber auch umgekehrt, wenn die Polokonik einer Geraden l in ein Linienpaar ausartet, dessen Doppelpunkt $\mathfrak{Q}$ ist, so müssen die geraden Polaren aller Punkte von l Tangenten der Polokonik sein, also alle durch $\mathfrak{Q}$ gehen, folglich muß auch nach § 23, 1 die konische Polare von $\mathfrak{Q}$ durch alle Punkte von l gehen, d. h. selbst in ein Linienpaar zerfallen, dessen einer Teil l ist. Wir schließen also:

Alle in Linienpaare ausartenden Polokoniken haben ihre Doppelpunkte auf der Hesseschen Kurve $H^{(3)}$ der gegebenen $C^{(3)}$.

Wir bemerken schließlich noch, daß die Polokonik $g^{(2)}$ einer Geraden g, welche der $C^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ begegnet, durch die beiden Doppelpunkte $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{Q}_0'$ derjenigen Punktinvolution auf g hindurchgeht, welche durch die Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$$

bestimmt wird (§ 21, 3), die mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ein äquianharmonisches System bilden (s. d.). Also sind $\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_0'$ konjugiert-imaginär, sobald $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ alle drei reell sind, dagegen reell, sobald einer der drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ reell ist und die beiden andern konjugiert-imaginär sind.

§ 25. Der die konische Polare begleitende Kegelschnitt.

1. Wir haben in § 22, 4 gesehen, daß aus einem Punkt $\mathfrak{P}$ in der Ebene im allgemeinen sechs Tangenten an die $C^{(3)}$ gehen, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, der konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ des Punktes $\mathfrak{P}$, liegen.

Eine solche Tangente aus $\mathfrak{P}$, welche in $\mathfrak{T}$ berührt, muß der $C^{(3)}$ noch in einem dritten Punkte $\mathfrak{S}$ begegnen und dieser dritte Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ kann auf folgende Weise ermittelt werden:

Die konische Polare von $\mathfrak{S}$ muß bekanntlich durch $\mathfrak{S}$ und durch $\mathfrak{T}$ gehen, weil auch $|\mathfrak{S}\mathfrak{T}|$ in $\mathfrak{T}$ die $C^{(3)}$ berührt. Nennen wir diesen Kegelschnitt $\mathfrak{S}^{(2)}$, so muß nach dem Fundamentalsatze die Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{S}^{(2)}$ identisch sein mit der Polare von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$; nennen wir den Schnittpunkt dieser Polare mit dem Strahle $|\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{T}|$ den Punkt $\mathfrak{x}$, so ist er durch die Bedingung bestimmt

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{x}) = -1;$$

da nun auch die Polare von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ durch $\mathfrak{x}$ gehen muß und $\mathfrak{P}^{(2)}$ durch $\mathfrak{T}$ geht, außerdem aber noch in einem zweiten Punkt $\mathfrak{T}'$ von dem Strahle $|\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{T}|$ getroffen wird, so muß auch

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}) = -1$$

sein. Hieraus folgt aber

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{T}'\mathfrak{x}) = 2,$$

und da

$$\underline{(\mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{x}\mathfrak{P}) = -1,}$$

so folgt

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}) = -2,$$

also

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{S}\mathfrak{P}) = 3,$$
$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{S}) = \tfrac{1}{3}.$$

Durch diese Bedingung ist der Punkt $\mathfrak{S}$ vollständig bestimmt, denn $\mathfrak{P}$ ist gegeben, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ sind die beiden Schnittpunkte der konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ mit dem Berührungsstrahl $|\mathfrak{P}\mathfrak{T}|$ und $\mathfrak{S}$ ist der dritte Schnittpunkt desselben mit der $C^{(3)}$.

2. Der Punkt $\mathfrak{S}$ ist nichts anderes, als der zu $\mathfrak{T}$ zugehörige Tangentialpunkt. Nun gehen aus $\mathfrak{P}$ im allgemeinen sechs Tangenten an die $C^{(3)}$ und ihre sechs Berührungspunkte $\mathfrak{T}$ haben daher auch sechs Tangentialpunkte $\mathfrak{S}$. Wir können aber anstatt der sechs Berührungspunkte $\mathfrak{T}$ auf der konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ sämtliche Punkte derselben

ins Auge fassen und auf dem um den festgehaltenen Punkt $\mathfrak{P}$ gedrehten Strahle $|\mathfrak{P}\mathfrak{T}|$ allemal einen zugehörigen Punkt $\mathfrak{S}$ aus der obigen Bedingung konstruieren. Dann wird, da der Strahl $|\mathfrak{P}\mathfrak{T}|$ noch einen zweiten Punkt $\mathfrak{T}'$ der konischen Polare enthält, auf ihm auch noch ein zweiter Punkt $\mathfrak{S}'$ sich vorfinden, der durch die Bedingung bestimmt wird

$$(\mathfrak{T}'\mathfrak{T}\mathfrak{P}\mathfrak{S}') = \tfrac{1}{3}$$

oder

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{S}') = 3,$$

und der gesamte Ort der Punkte $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ wird offenbar die Eigenschaft haben, durch die sechs Tangentialpunkte der sechs Berührungspunkte von den Tangenten aus $\mathfrak{P}$ an die $C^{3)}$ hindurchzugehen. Es wird sich zeigen, daß dieser Ort ein neuer Kegelschnitt ist, welcher der begleitende Kegelschnitt der konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ genannt wird und zu diesem in naher Beziehung steht.

Aus den beiden Bedingungen, durch welche $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ gefunden werden, ergiebt sich

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{S}) = (\mathfrak{T}'\mathfrak{T}\mathfrak{P}\mathfrak{S}'),$$

daher bestimmen die beiden Punktepaare

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}' \text{ und } \mathfrak{S}\mathfrak{S}'$$

eine Punktinvolution, von welcher $\mathfrak{P}$ ein Doppelpunkt sein muß; der andere Doppelpunkt dieser hyperbolischen Punktinvolution heiße $\mathfrak{p}$ und liegt daher auf der Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$, weil

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{p}) = -1,$$
$$(\mathfrak{S}\mathfrak{S}'\mathfrak{P}\mathfrak{p}) = -1$$

sein muß. Wenn daher der Ort der Punkte $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$, wie wir sogleich sehen werden, ein Kegelschnitt ist, so müssen für ihn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ konjugierte Punkte sein, ebenso wie für die konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$. Von dieser Bemerkung werden wir später Gebrauch machen.

3. Wir stehen also jetzt vor der Aufgabe:

Es sind ein Punkt $\mathfrak{P}$ und ein Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ gegeben; auf jedem durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Strahle, welcher in $\mathfrak{T}$ und

$\mathfrak{T}'$ dem Kegelschnitt begegnet, werden die Punkte $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ durch die Bedingungen

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{S}) = \tfrac{1}{3},$$
$$(\mathfrak{T}'\mathfrak{T}\mathfrak{P}\mathfrak{S}') = \tfrac{1}{3}$$

bestimmt; es soll der Ort der Punkte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ ermittelt werden bei Drehung des Strahles um $\mathfrak{P}$.

Zur Auflösung ziehen wir durch $\mathfrak{P}$ einen festen Strahl, welcher $\mathfrak{P}^{(2)}$ in den Punkten $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_0'$, treffe, und bestimmen die Punkte $\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_0'$ durch die Bedingungen

$$(\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_0'\mathfrak{P}\mathfrak{S}_0) = \tfrac{1}{3},$$
$$(\mathfrak{T}_0'\mathfrak{T}_0\mathfrak{P}\mathfrak{S}_0') = \tfrac{1}{3},$$

dann müssen sich wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$|\,\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}\,|,\ |\,\mathfrak{T}_0'\mathfrak{T}'\,|,\ |\,\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}\,|$$

in einem Punkte $\mathfrak{x}$ schneiden, welcher offenbar auf der Polare p des Punktes $\mathfrak{P}$ rücksichtlich $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt. Mit der von dem Punkte

$$\mathfrak{x} = (\mathfrak{T}_0\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}_0'\mathfrak{T}')$$

beschriebenen geraden Punktreihe auf p liegt nun perspektiv das Strahlbüschel, welches der Strahl $|\,\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}\,|$ bei der Drehung um den festen Punkt $\mathfrak{S}_0$ beschreibt.

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{T}_0'\mathfrak{T}_0\mathfrak{P}\mathfrak{S}_0') = (\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{S})$$

folgt aber auch, daß sich die drei Strahlen

$$|\,\mathfrak{T}_0'\mathfrak{T}\,|,\ |\,\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}'\,|,\ |\,\mathfrak{S}_0'\mathfrak{S}\,|$$

in einem Punkte schneiden, und dieser Schnittpunkt

$$\mathfrak{y} = (\mathfrak{T}_0'\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}_0\mathfrak{T}')$$

beschreibt ebenfalls eine gerade Punktreihe auf derselben Geraden p, der Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$. Mit dieser Punktreihe liegt das von $|\,\mathfrak{S}_0'\mathfrak{S}\,|$ beschriebene Strahlbüschel perspektiv bei der Drehung um den festen Punkt $\mathfrak{S}_0'$.

Die beiden von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auf demselben Träger p beschriebenen Punktreihen sind nun selbst projektiv (und involutorisch liegend), weil $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ konjugierte Punkte sind rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{P}^{(2)}$ und mit $\mathfrak{P}$ zusammen

allemal ein Tripel konjugierter Punkte (Polardreieck) für $\mathfrak{P}^{(2)}$ bilden; folglich sind auch die von den Strahlen

$$|\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}| \text{ und } |\mathfrak{S}_0'\mathfrak{S}|$$

beschriebenen Strahlbüschel projektiv, und der Ort von $\mathfrak{S}$ ist daher ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_0'$ der beiden erzeugenden Strahlbüschel selbst hindurchgeht. In gleicher Weise sehen wir, daß auch

$$|\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}'| \text{ und } |\mathfrak{S}_0'\mathfrak{S}'|$$

zwei projektive Strahlbüschel beschreiben, also einen Kegelschnitt erzeugen, den der Punkt $\mathfrak{S}'$ durchläuft. Wir erkennen aber auch leicht, daß diese beiden Kegelschnitte identisch sind. Denn wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{T}_0'\mathfrak{T}_0\mathfrak{P}\mathfrak{S}_0') = (\mathfrak{T}'\mathfrak{T}\mathfrak{P}\mathfrak{S}')$$

liegt der Punkt $\mathfrak{x}$ auch auf dem Strahle $|\mathfrak{S}_0'\mathfrak{S}'|$, und wegen der Gleichheit

$$(\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_0'\mathfrak{P}\mathfrak{S}_0) = (\mathfrak{T}'\mathfrak{T}\mathfrak{P}\mathfrak{S}')$$

liegt der Punkt $\mathfrak{y}$ auch auf dem Strahle $|\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}'|$; da hiernach

$$(\mathfrak{S}_0\mathfrak{S},\ \mathfrak{S}_0'\mathfrak{S}') = \mathfrak{x},$$
$$(\mathfrak{S}_0'\mathfrak{S},\ \mathfrak{S}_0\mathfrak{S}') = \mathfrak{y}$$

ist, so folgt

$$(\mathfrak{S}_0\mathfrak{x},\ \mathfrak{S}_0'\mathfrak{y}) = \mathfrak{S},$$
$$(\mathfrak{S}_0\mathfrak{y},\ \mathfrak{S}_0'\mathfrak{x}) = \mathfrak{S}'.$$

Wegen der involutorischen Lage der beiden von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ beschriebenen projektiven Punktreihen auf p sind die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ vertauschbar, also sind die von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ beschriebenen Orte identisch.

Dies ist denn auch von vornherein ersichtlich, weil aus den beiden Bedingungen

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{S}) = \tfrac{1}{3},$$
$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{S}'\mathfrak{P}) = \tfrac{1}{3}$$

folgt

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{S}'\mathfrak{S}) = \tfrac{1}{9}$$

oder

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{S}\mathfrak{S}') = 9.$$

Weil nun die beiden Punkte $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'$ die Schnittpunkte des durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Strahles mit der konischen Polare sind und durch Vertauschung derselben nur $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ übergeht oder umgekehrt, müssen auch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ denselben Kegelschnitt durchlaufen.

Für diesen Kegelschnitt $\mathfrak{S}^{(2)}$ ist das Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ ein Polardreieck (selbstkonjugiertes Dreieck) ebenso wie für den Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$, und da $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sich auf der festen Geraden p bewegen und eine Punktinvolution beschreiben, die beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich zugehört, so sehen wir, daß die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{S}^{(2)}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}$ eine doppelte Berührung haben, indem für sie gleichzeitig $\mathfrak{P}$ und p Pol und Polare sind und die ihnen zugehörigen Punkt- und Strahleninvolutionen zusammenfallen. Wir können somit als Resultat der vorigen Untersuchung den Satz aussprechen:

Aus einem Punkte $\mathfrak{P}$ in der Ebene gehen im allgemeinen sechs Tangenten an die $C^{(3)}$, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$, der konischen Polare von $\mathfrak{P}$, liegen. Jede dieser sechs Tangenten schneidet die $C^{(3)}$ noch in einem dritten Punkte; diese sechs dritten Punkte liegen auf einem neuen Kegelschnitt $\mathfrak{S}^{(2)}$, welcher der begleitende Kegelschnitt der konischen Polare heißt. Die konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ und ihr begleitender Kegelschnitt $\mathfrak{S}^{(2)}$ haben eine doppelte Berührung, indem für beide der Punkt $\mathfrak{P}$ und seine Polare p rücksichtlich $\mathfrak{P}^{(2)}$ oder $\mathfrak{S}^{(2)}$ dieselben sind, sowie die den Trägern p und $\mathfrak{P}$ zugehörigen Punkt- und Strahleninvolutionen rücksichtlich beider Kegelschnitte zusammenfallen.*

Ist $\mathfrak{T}$ ein Berührungspunkt einer aus $\mathfrak{P}$ an die $C^{(3)}$ gelegten Tangente und $\mathfrak{S}$ der Tangentialpunkt derselben,

* Andere Beweise dieses Satzes sind gegeben worden von

R. Slawyk: „Die Polareigenschaften der allgemeinen ebenen Kurve dritter Ordnung." Inaug.-Diss. Breslau 1872.

A. Milinowski: „Zur Polarentheorie der Kurven und Flächen dritter Ordnung." Borchardts Journ. f. Mathematik. Bd. 89 S. 136 flg.

ferner $\mathfrak{T}'$ der zweite Schnittpunkt des Strahles $|\mathfrak{P}\mathfrak{T}|$ mit der konischen Polare, so wird der Punkt $\mathfrak{S}$ durch die Bedingung gefunden

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{S}) = \tfrac{1}{3}.$$

Der Strahl $|\mathfrak{P}\mathfrak{T}|$ schneidet den begleitenden Kegelschnitt $\mathfrak{S}^{(2)}$ noch in einem zweiten Punkt, und für jeden durch $\mathfrak{P}$ gehenden Strahl behält das Doppelverhältnis

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{S}\mathfrak{S}') = 9$$

den von $\mathfrak{P}$ unabhängigen konstanten Wert 9, welcher aussagt, daß die Punkte $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ niemals durch die Punkte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ getrennt werden, weil jener Wert positiv ist, wie dies auch aus der Natur zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte hervorgeht.

Aus der Bedingung

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\mathfrak{S}) = \tfrac{1}{3}$$

folgt, daß wenn $\mathfrak{P}$ ein solcher besonderer, der Hesseschen Kurve $H^{(3)}$ angehörender Punkt ist, daß seine konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ in ein Linienpaar ausartet, dann auch sein begleitender Kegelschnitt $\mathfrak{S}^{(2)}$ in ein Linienpaar ausarten wird, welches mit dem vorigen denselben Doppelpunkt haben muß. Diese beiden Linienpaare liefern ein Doppelverhältnis, welches den konstanten Wert 9 besitzt.

§ 26. Metrische Beziehungen.

1. Wenn man durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ in der Ebene der $C^{(3)}$ eine Gerade g zieht, welche der Kurve in den Punkten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}$$

begegnet, so gehören die konischen Polaren der vier Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, nämlich

$$\mathfrak{P}^{(2)},\ \mathfrak{A}^{(2)},\ \mathfrak{B}^{(2)},\ \mathfrak{C}^{(2)}$$

einem Kegelschnittbüschel an, welches mit der von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gebildeten geraden Punktreihe auf dem Träger g projektiv ist (§ 23, 3).



Nach unserm Fundamentalsatz ist nun die Polare

von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$ identisch mit der Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$,
„ $\mathfrak{P}$ „ $\mathfrak{B}^{(2)}$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{B}$ „ $\mathfrak{P}^{(2)}$,
„ $\mathfrak{P}$ „ $\mathfrak{C}^{(2)}$ „ „ „ „ „ $\mathfrak{C}$ „ $\mathfrak{P}^{(2)}$;

nehmen wir noch die Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ hinzu und nennen die Durchschnittspunkte dieser vier Polaren mit der Geraden g bez.

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},$$

so lassen sich dieselben in einfacher Weise ermitteln durch die Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = -1,\quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) = -1,\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1) = -1,$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{a}) = -1,\quad (\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{P}\mathfrak{b}) = -1,\quad (\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{P}\mathfrak{c}) = -1,$$

und wir haben, weil die Polaren von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ ein Strahlbüschel bilden, welches mit der Punktreihe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ projektiv ist,

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{p}).$$

Aus den sechs vorigen harmonischen Beziehungen folgen drei hyperbolische Involutionen mit den Punktepaaren

$$\text{I.}\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{C},\ \mathfrak{P}\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{B}\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}\mathfrak{A},\ \mathfrak{P}\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{C}\mathfrak{C},\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{A}\mathfrak{B},\ \mathfrak{P}\mathfrak{c}, \end{array}\right.$$

und aus diesen die gleichen Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}),$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{b}),$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}),$$

und hieraus

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}),$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{c}).$$

Aus den beiden Gleichheiten

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{b}\mathfrak{B}),$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a})$$

ergiebt sich

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{b}\mathfrak{a})$$
$$= (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{C}\mathfrak{A}),$$

folglich gehören die Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a},\ \mathfrak{B}\mathfrak{b},\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}$$

einer **Involution** an, und weil

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{p})$$

ist, gehört auch das Punktepaar $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ derselben an, also die vier Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a},\ \mathfrak{B}\mathfrak{b},\ \mathfrak{C}\mathfrak{c},\ \mathfrak{P}\mathfrak{p}$$

gehören einer und derselben Involution an.

[Es treten auch noch andere Involutionen hinzu, nämlich aus

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{C}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{C})$$

folgt, daß die drei Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{b},\ \mathfrak{B}\mathfrak{c},\ \mathfrak{C}\mathfrak{a}$$

einer Involution angehören; und aus

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{b}\mathfrak{A}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{B}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{B})$$

folgt, daß die drei Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{c},\ \mathfrak{B}\mathfrak{a},\ \mathfrak{C}\mathfrak{b}$$

ebenfalls einer Punktinvolution angehören.]

2. Ob die Involution, deren vier Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a},\ \mathfrak{B}\mathfrak{b},\ \mathfrak{C}\mathfrak{c},\ \mathfrak{P}\mathfrak{p}$$

sind, eine hyperbolische oder elliptische ist, darüber entscheidet der positive oder negative Wert des Doppelverhältnisses

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{B}\mathfrak{b}),$$

welchen wir ermitteln wollen.

Da

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{P}) = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} \cdot \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{P}}{\mathfrak{C}\mathfrak{P}}$$

und

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{B}) = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}{\mathfrak{C}\mathfrak{P}} \cdot \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

folgt durch Multiplikation

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = -\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{P}^2}$$

und

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{B}\mathfrak{b}) = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{P}^2};$$

der Ausdruck im Zähler rechts läßt folgende Umformung zu:

$$\mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{CP}^2 + (\mathfrak{AB} + \mathfrak{BP})\, \mathfrak{BP} \cdot \mathfrak{CA} \cdot \mathfrak{CB},$$
$$\mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{CP}^2 + \mathfrak{BP}^2 \cdot \mathfrak{CA} \cdot \mathfrak{CB} + \mathfrak{BP} \cdot \mathfrak{AB} \cdot \mathfrak{CA} \cdot \mathfrak{CB},$$
$$\mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{CP}^2 + \mathfrak{BP}^2 \cdot \mathfrak{CA}\, (\mathfrak{CA} + \mathfrak{AB}) + \mathfrak{BP} \cdot \mathfrak{AB} \cdot \mathfrak{CA} \cdot \mathfrak{CB},$$
$$\mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{CP}^2 + \mathfrak{CA}^2 \cdot \mathfrak{BP}^2 + \mathfrak{BP} \cdot \mathfrak{CA} \cdot \mathfrak{AB}\, (\mathfrak{BP} + \mathfrak{CB}),$$
$$\mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{CP}^2 + \mathfrak{CA}^2 \cdot \mathfrak{BP}^2 + \mathfrak{BP} \cdot \mathfrak{CP} \cdot \mathfrak{CA} \cdot \mathfrak{AB},$$
$$(\mathfrak{AB} \cdot \mathfrak{PC} + \mathfrak{CA} \cdot \mathfrak{PB})^2 - \mathfrak{PC} \cdot \mathfrak{PB} \cdot \mathfrak{AB} \cdot \mathfrak{CA}$$

oder, da identisch

$$\mathfrak{AB} \cdot \mathfrak{PC} + \mathfrak{BC} \cdot \mathfrak{PA} + \mathfrak{CA} \cdot \mathfrak{PB} = 0,$$

ist

$$\mathfrak{BC}^2 \cdot \mathfrak{AP}^2 - \mathfrak{BP} \cdot \mathfrak{CP} \cdot \mathfrak{CA} \cdot \mathfrak{AB};$$

dieser Ausdruck zu dem vorletzten hinzugefügt und die halbe Summe beider genommen erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{PC}^2 + \mathfrak{BC}^2 \cdot \mathfrak{PA}^2 + \mathfrak{CA}^2 \cdot \mathfrak{PB}^2),$$

mithin wird der Wert des Doppelverhältnisses der symmetrische Ausdruck

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{B}\mathfrak{b}) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{PC}^2 + \mathfrak{BC}^2 \cdot \mathfrak{PA}^2 + \mathfrak{CA}^2 \cdot \mathfrak{PB}^2}{\mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{PC}^2}$$

und als Summe von lauter Quadraten ein positiver. Wir erhalten in gleicher Weise

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{C}\mathfrak{c}) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{BC}^2 \cdot \mathfrak{PA}^2 + \mathfrak{CA}^2 \cdot \mathfrak{PB}^2 + \mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{PC}^2}{\mathfrak{BC}^2 \cdot \mathfrak{PA}^2},$$
$$(\mathfrak{C}\mathfrak{c}\mathfrak{A}\mathfrak{a}) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{CA}^2 \cdot \mathfrak{PB}^2 + \mathfrak{AB}^2 \cdot \mathfrak{PC}^2 + \mathfrak{BC}^2 \cdot \mathfrak{PA}^2}{\mathfrak{CA}^2 \cdot \mathfrak{PB}^2},$$

woraus die Beziehung zwischen den drei Doppelverhältnissen entspringt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{C}) + (\mathfrak{C}\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{A}) = 2.$$

Das Resultat der Rechnung ist also, daß die Involution deren Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a},\ \mathfrak{B}\mathfrak{b},\ \mathfrak{C}\mathfrak{c},\ \mathfrak{P}\mathfrak{p}$$

sind, eine h y p e r b o l i s c h e ist.

Wir bemerken noch, weil, wie wir oben (1.) gesehen haben, auch die Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{c},\ \mathfrak{B}\mathfrak{a},\ \mathfrak{C}\mathfrak{b}$$

einer Involution angehören, also

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{B}\mathfrak{c})$$

ist und positiv sein muß, daß die Involution, deren Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{c},\ \mathfrak{B}\mathfrak{a},\ \mathfrak{C}\mathfrak{b}$$

sind, ebenfalls eine **hyperbolische** ist; und aus der Gleichheit

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{c}\mathfrak{B}\mathfrak{a})$$

folgt endlich, daß auch die Involution, deren Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{b},\ \mathfrak{B}\mathfrak{c},\ \mathfrak{C}\mathfrak{a}$$

sind, eine **hyperbolische** sein muß.

Auch bemerken wir, weil

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{p})$$

und

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{A})$$

ist, daß

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{A})$$

sein muß, ebenso

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{B}),$$
$$(\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{C});$$

wir erhalten hieraus drei neue hyperbolische Involutionen, deren Punktepaare sind

$$\text{II.} \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{p}\mathfrak{A}, \\ \mathfrak{b}\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}\mathfrak{a},\ \mathfrak{p}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{c}\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{p}\mathfrak{C}, \end{cases}$$

welche den Involutionen I. (in 1.) gegenüberstehen.

3. Aus allen diesen Involutionen gehen nun eine Menge metrischer Beziehungen hervor, zu denen wir gelangen aus den bekannten metrischen Beziehungen harmonischer Elemente.

Es folgt zunächst aus den Involutionen I. in (1.)

$$1) \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1} = \dfrac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + \dfrac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = \dfrac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{P}} + \dfrac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}}, \\ \dfrac{2}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1} = \dfrac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \dfrac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} = \dfrac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{P}} + \dfrac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}}, \\ \dfrac{2}{\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1} = \dfrac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} + \dfrac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = \dfrac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{P}} + \dfrac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}}, \end{cases}$$

woraus durch Addition folgt

$$2)\qquad \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1} + \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1} = 0,$$

$$3)\qquad \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}} + \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}};$$

multiplizieren wir die Gleichungen 1) der Reihe nach mit $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ und addieren sie dann, so folgt

$$3 = 3 + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{P}}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{P}}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}},$$

oder

$$4)\qquad \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{P}}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{P}}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}} = 0,$$

$$5)\qquad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{P}}{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{P}}{\mathfrak{b}\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{P}}{\mathfrak{c}\mathfrak{C}} = 3.$$

Aus den Involutionen II. in 2. ergiebt sich in gleicher Weise

$$6)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \dfrac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = \dfrac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} + \dfrac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{A}}, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} + \dfrac{1}{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} = \dfrac{1}{\mathfrak{b}\mathfrak{p}} + \dfrac{1}{\mathfrak{b}\mathfrak{B}}, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} + \dfrac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = \dfrac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{p}} + \dfrac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{C}}, \end{cases}$$

woraus durch Addition folgt

$$7)\qquad \frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}} + \frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{b}} + \frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{c}} = \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{b}\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{C}},$$

woraus in Verbindung mit 3) sich die Beziehung ergiebt

$$8)\qquad \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{p}} + \frac{1}{\mathfrak{b}\mathfrak{p}} + \frac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{p}};$$

multiplizieren wir aber die Beziehungen 6) der Reihe nach mit $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{p}$ und addieren sie dann, so folgt

$$3 = 3 + \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}{\mathfrak{b}\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{p}}{\mathfrak{c}\mathfrak{C}},$$

oder

$$9)\qquad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}{\mathfrak{a}\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}{\mathfrak{b}\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{p}}{\mathfrak{c}\mathfrak{C}} = 0,$$

$$10)\qquad \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{p}}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{p}}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}} = 3.$$

Multiplizieren wir die Gleichungen 1) bez. mit $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{p}$, und addieren sie dann, so folgt nach 10)

$$11)\qquad \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{\mathfrak{A}\mathfrak{P}}+\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{p}}{\mathfrak{B}\mathfrak{P}}+\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{p}}{\mathfrak{C}\mathfrak{P}}=0,$$

also auch

$$12)\qquad \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}}=\frac{3}{\mathfrak{P}\mathfrak{p}};$$

multiplizieren wir dagegen die Gleichungen 6) bez. mit $\mathfrak{a}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{P}$ und addieren sie, so folgt in gleicher Weise

$$13)\qquad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{P}}{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}+\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{P}}{\mathfrak{b}\mathfrak{p}}+\frac{\mathfrak{c}\mathfrak{P}}{\mathfrak{c}\mathfrak{p}}=0,$$

also

$$14)\qquad \frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}}+\frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{b}}+\frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{c}}=\frac{3}{\mathfrak{p}\mathfrak{P}}.$$

Da der Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ rücksichtlich seiner konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt, d. h. auf der geraden Polare p des Punktes $\mathfrak{P}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$, so können wir die Punkte der geraden Polare p von $\mathfrak{P}$ direkt durch folgende metrische Beziehung bestimmen:

Dreht man um einen Punkt $\mathfrak{P}$ in der Ebene der $C^{(3)}$ einen Strahl, welcher der $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ begegnet und bestimmt auf diesem Strahle allemal einen Punkt $\mathfrak{p}$ durch die Bedingung

$$\frac{3}{\mathfrak{P}\mathfrak{p}}=\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}},$$

so ist der Ort des Punktes $\mathfrak{p}$ eine gerade Linie, nämlich die gerade Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$, oder die gewöhnliche Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ rücksichtlich seiner konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$.

4. Schneidet die konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ des Punktes $\mathfrak{P}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$ den Strahl $g=|\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ in den Punkten

$$\mathfrak{Q} \text{ und } \mathfrak{Q}_1,$$

so gilt für den Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ der geraden Polare von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{P}^{(2)}$ bekanntlich die harmonische Beziehung



$$\frac{2}{\mathfrak{P}\mathfrak{p}} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1}$$

(von welcher die oben gefundene Beziehung eine unmittelbare Erweiterung für die $C^{(3)}$ ist).

Wir haben nach dem vorigen Resultat

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}}\right).$$

Wenn wir noch das Produkt

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \, . \, \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1}$$

kennten, so hätten wir zwei Größen (Summe und Produkt), durch welche die Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ vermittelst einer quadratischen Gleichung zu ermitteln wären. Da nun durch

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{p}} = \frac{\frac{1}{2}\,(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1)}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \, . \, \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1}$$

der Punkt $\mathfrak{p}$ bereits bekannt ist, so brauchen wir nur die Grösse

$$\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1) = \mathfrak{P}\mathfrak{m},$$

wo $\mathfrak{m}$ die Mitte zwischen $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$ bedeutet, zu ermitteln, um auch das gesuchte Produkt zu erhalten. Der Punkt $\mathfrak{m}$ kann aber auf folgende Weise gefunden werden:

Die vier konischen Polaren

$$\mathfrak{A}^{(2)}, \ \mathfrak{B}^{(2)}, \ \mathfrak{C}^{(2)}, \ \mathfrak{P}^{(2)}$$

schneiden die Gerade g in den Punktepaaren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \ \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$$

und gehören einem Kegelschnittbüschel an, folglich diese Punktepaare einer Punktinvolution. Nehmen wir von dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ die Polaren rücksichtlich der vier Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, $\mathfrak{B}^{(2)}$, $\mathfrak{C}^{(2)}$, $\mathfrak{P}^{(2)}$, so schneiden dieselben die Gerade g in den vier Mitten der Strecken $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$, und bezeichnen wir diese vier Punkte

$\mathfrak{a}_0$ die Mitte zwischen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$,
$\mathfrak{b}_0$ „ „ „ $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$,
$\mathfrak{c}_0$ „ „ „ $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$,
$\mathfrak{m}$ „ „ „ $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1$,

so müssen sie projektiv entsprechen den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}$, d. h.

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{m});$$

dadurch wird $\mathfrak{m}$ vollständig bestimmt.

Wir haben also in den hyperbolischen Involutionen die Punktepaare

$$\text{I.} \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}\mathfrak{A}, \ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1, \ \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \ \mathfrak{P}_\infty\mathfrak{a}_0, \\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}, \ \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1, \ \mathfrak{C}\mathfrak{A}, \ \mathfrak{P}_\infty\mathfrak{b}_0, \\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}, \ \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1, \ \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \ \mathfrak{P}_\infty\mathfrak{c}_0, \end{cases}$$

und diese Involutionen sind dieselben wie in (1.) S. 211. Hieraus folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_\infty) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}_0),$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_\infty) = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{b}_0),$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_\infty) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0),$$

also

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{b}_0) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0).$$

Aus den beiden Gleichheiten

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{b}_0\mathfrak{B})$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\mathfrak{C}) \qquad\qquad\qquad = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}_0)$$

folgt durch Multiplikation

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{C}\mathfrak{A}),$$

mithin gehören die Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0, \ \mathfrak{B}\mathfrak{b}_0, \ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_0$$

einer Involution an, und in dieser Involution ist wegen der Projektivität

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}) = (\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{m})$$

auch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{m}$ ein Paar konjugierter Punkte.

Nennen wir in dieser Involution den dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ entsprechenden Punkt, d. h. den Mittelpunkt dieser Involution $\mathfrak{O}$, so haben wir die fünf Punktepaare derselben

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0, \ \mathfrak{B}\mathfrak{b}_0, \ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_0, \ \mathfrak{P}_\infty\mathfrak{O}, \ \mathfrak{P}\mathfrak{m},$$

und nach bekannten involutorischen Eigenschaften

$$\mathfrak{O}\mathfrak{A} . \mathfrak{O}\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{O}\mathfrak{B} . \mathfrak{O}\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{O}\mathfrak{C} . \mathfrak{O}\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{O}\mathfrak{P} . \mathfrak{O}\mathfrak{m}.$$

Aus den Involutionen I. folgt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_\infty) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}_0),$$

aus der letzten Involution aber

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_\infty) = (\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{D}); \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{A}),$$

folglich ist auch

$$(\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{D}) = (\mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{A}),$$

mithin gehören die drei Punktepaare

$$\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0, \ \mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0, \ \mathfrak{D}\mathfrak{A}$$

einer neuen hyperbolischen Involution an, und in gleicher Weise finden wir die drei Punktepaare der drei Involutionen

$$\text{II.} \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_0, \ \mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0, \ \mathfrak{D}\mathfrak{A}, \\ \mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_0, \ \mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0, \ \mathfrak{D}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_0, \ \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0, \ \mathfrak{D}\mathfrak{C}. \end{cases}$$

5. Aus diesen Involutionen I. und II. fließen eine Menge metrischer Beziehungen, nämlich aus I.

$$1) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0} = \dfrac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + \dfrac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0} = \dfrac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \dfrac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0} = \dfrac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}} + \dfrac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}, \end{cases}$$

woraus durch Addition folgt

$$2) \qquad \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0} + \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0} = 0,$$

und wenn wir von den drei Gleichungen 1) die erste mit $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$, die zweite mit $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$, die dritte mit $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ multiplizieren und addieren

$$3) \qquad \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0} = 3,$$

oder

$$4) \qquad \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0} = 0.$$

Aus den Involutionen II. folgt

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{D}} + \dfrac{1}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{A}} = \dfrac{1}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0} + \dfrac{1}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_0}, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{D}} + \dfrac{1}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{B}} = \dfrac{1}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0} + \dfrac{1}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}_0}, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{D}} + \dfrac{1}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{C}} = \dfrac{1}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0} + \dfrac{1}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{b}_0}, \end{cases}$$

woraus durch Addition folgt mit Rücksicht auf 2)

$$6)\quad \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{a}_0} + \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{b}_0} + \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{c}_0} = 0.$$

Wegen der Beziehungen

$$\mathfrak{D}\mathfrak{A} \,.\, \mathfrak{D}\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{D}\mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{D}\mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{D}\mathfrak{c}_0$$

ergiebt sich zugleich

$$7)\quad \mathfrak{D}\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\mathfrak{B} + \mathfrak{D}\mathfrak{C} = 0,$$

was nichts anderes aussagt, als daß $\mathfrak{D}$ der Schwerpunkt der drei gleich belastet gedachten Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist, also für jeden andern Punkt $\mathfrak{P}$ der Geraden g die Bedingung, welche aus der vorigen hervorgeht, erfüllt wird

$$8)\quad 3 \,.\, \mathfrak{P}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\mathfrak{A} + \mathfrak{P}\mathfrak{B} + \mathfrak{P}\mathfrak{C}.$$

(Nimmt man für $\mathfrak{P}$ insbesondere $\mathfrak{P}_\infty$, so geht $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{D}$ über und man erhält den speziellen Satz: Bestimmt man auf einem System paralleler Sehnen einer $C^{(3)}$ zu den drei Schnittpunkten auf jeder den Schwerpunkt, so ist der Ort desselben eine gerade Linie, ein Durchmesser der $C^{(3)}$).

Multipliziert man die drei Beziehungen 5) bez. mit $\mathfrak{D}\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{D}\mathfrak{c}_0$ und addiert, so folgt die schon bekannte Beziehung 4); multiplizieren wir dagegen die Beziehungen 5) bez. mit $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ und addieren, so folgt wegen 3)

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}\mathfrak{a}_0} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}\mathfrak{b}_0} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}\mathfrak{c}_0} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0} + 3;$$

nun folgt aber aus den beiden Beziehungen 2) und 4)

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0} = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0} + \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0} = 0$$

durch Abziehen

$$\frac{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0} + \frac{\mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0} = 0$$

oder

$$\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_0} = 0,$$

ebenso

$$\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}_0} = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{b}_0} = 0,$$

woraus durch Addition folgt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0\left\{\frac{1}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0} + \frac{1}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_0}\right\} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}_0\left\{\frac{1}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0} + \frac{1}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{a}_0}\right\} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}_0\left\{\frac{1}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0} + \frac{1}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{b}_0}\right\} = 0,$$

also nach 5)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0\left\{\frac{1}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{D}} + \frac{1}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{A}}\right\} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}_0\left\{\frac{1}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{D}} + \frac{1}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{B}}\right\} + \mathfrak{C}\mathfrak{c}_0\left\{\frac{1}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{D}} + \frac{1}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{C}}\right\} = 0,$$

9) $$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{D}} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{D}} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{D}} = 3,$$

woraus folgt

10) $$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{D}} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{D}} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{D}} = 6,$$

mithin wird die vorige Beziehung

11) $$\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{\mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0} = 3.$$

Die Beziehung 10) läßt sich aber wegen der Gleichheit

$$\mathfrak{D}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{D}\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{D}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{D}\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{D}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{D}\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{D}\mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{D}\mathfrak{m}$$

auch so schreiben

12) $$\mathfrak{D}\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{C}^2 = 6\,.\,\mathfrak{D}\mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{D}\mathfrak{m},$$

woraus folgt, daß die Involution, deren Punktepaare

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{B}\mathfrak{b}_0,\ \mathfrak{C}\mathfrak{c}_0$$

sind, eine hyperbolische ist, weil ihre Potenz als die Summe dreier Quadrate einen positiven Wert hat. Dies läßt sich auch in folgender Weise direkt zeigen:

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{b}_0) = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{P}_\infty) = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}},$$

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{a}_0\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_\infty\mathfrak{B}) = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

folgt durch Multiplikation

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0) = -\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2},$$

also

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0) = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}$$

$$= \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{B})^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}$$

$$= \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2},$$

also

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2},$$

also positiv, mithin die Involution eine hyperbolische.

Wir bemerken noch die aus dem Werte dieses Doppelverhältnisses hervorgehende Beziehung

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0\mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0\mathfrak{C}) + (\mathfrak{C}\mathfrak{c}_0\mathfrak{a}_0\mathfrak{A}) = 2.$$

Kehren wir aber zu der Beziehung 12) zurück, so folgt, weil nach 7) $\mathfrak{O}\mathfrak{A} + \mathfrak{O}\mathfrak{B} + \mathfrak{O}\mathfrak{C} = 0$ ist

$$13)\quad \mathfrak{O}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{C} + \mathfrak{O}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{A} + \mathfrak{O}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{B} = -\,3\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{m}.$$

Die linke Seite läßt sich auch so schreiben

$$\mathfrak{O}\mathfrak{B}\,\{\mathfrak{O}\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\mathfrak{C}\} + \mathfrak{O}\mathfrak{C}\,\{\mathfrak{O}\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\mathfrak{A}\} + \mathfrak{O}\mathfrak{A}\,\{\mathfrak{O}\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\mathfrak{B}\},$$

also ist

$$14)\quad \begin{cases} \mathfrak{O}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{B} + \mathfrak{O}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{C} + \mathfrak{O}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{A} = -\,3\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{m}, \\ \mathfrak{O}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{C} + \mathfrak{O}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{A} + \mathfrak{O}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{B} = -\,3\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{m}, \end{cases}$$

welche Beziehungen in die Gestalt übergeführt werden können

$$15)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B} + \mathfrak{P}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{C} + \mathfrak{P}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{A} = 0, \\ \mathfrak{P}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{C} + \mathfrak{P}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{A} + \mathfrak{P}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B} = 0, \end{cases}$$

woraus endlich auch durch Addition nach 8) hervorgeht

$$16)\quad \mathfrak{P}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{A} + \mathfrak{P}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{B} + \mathfrak{P}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{m}\mathfrak{C} = 9\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{O}\mathfrak{m}.$$

Indem wir weitere metrische Beziehungen, die sich hieraus ableiten lassen, übergehen, betrachten wir allein die Beziehungen 15), welche allein zwischen den Punkten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{P} \text{ und } \mathfrak{m}$$

obwalten, da es uns vornehmlich darauf ankam, die Abhängigkeit des Punktes $\mathfrak{m}$ von den gegebenen Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}$ zu ermitteln. Schreiben wir die Beziehungen 15) in der Gestalt:

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{C}}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = 0$$

oder

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\mathfrak{A}}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\mathfrak{B}}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\mathfrak{C}}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = 0,$$

so ergiebt sich die symmetrischere Gestalt

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = \mathfrak{P}\mathfrak{m}\left\{\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{A}}\right\}$$

und da nach dem Früheren (S. 216)

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}} = \frac{3}{\mathfrak{P}\mathfrak{p}}$$

war, so folgt jetzt

$$\frac{3}{\mathfrak{P}\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{m}} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{B}}.$$

Nun ist aber, wie wir oben (S. 217) gesehen haben,

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{m}} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1},$$

folglich haben wir die beiden Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1} = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{P}\mathfrak{B}}\right\},\\ &\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1} = \tfrac{2}{3}\left\{\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{C}}\right\}, \end{aligned}\right.$$

wo $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ die beiden Schnittpunkte des durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Strahles mit der konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ bedeuten. Hierdurch sind die Punkte $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}_1$ vermittelst einer quadratischen Gleichung bestimmt, und indem wir einen veränderlichen Strahl um den festen Punkt $\mathfrak{P}$ drehen, erhalten wir

sämtliche Punkteder konischen Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$. Die symmetrische Form der Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen zeigt uns, daß die Koëffizienten der quadratischen Gleichung auch bekannt sind, sobald nicht alle drei Schnittpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ reell, sondern nur einer reell und die beiden andern konjugiert-imaginär sind.

§ 27. Zusammenhang der Hesseschen Kurve $H^{(3)}$ und der Cayleyschen $K^{(3)}$ mit der gegebenen $C^{(3)}$.

1. Wir haben in § 23, 4., 5. gesehen, daß in dem Netz von Kegelschnitten $\mathfrak{P}^{(2)}$, welches die konischen Polaren zu sämtlichen Punkten der Ebene rücksichtlich einer $C^{(3)}$ bilden, unendlich viele vorkommen, die in Linienpaare ausarten, daß die Doppelpunkte dieser Linienpaare eine neue Kurve dritter Ordnung $H^{(3)}$, die Hessesche der gegebenen $C^{(3)}$, erfüllen und daß ein Punkt $\mathfrak{Q}$, dessen konische Polare in ein Linienpaar mit dem Doppelpunkte $\mathfrak{q}$ zerfällt, mit $\mathfrak{q}$ zusammen ein Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$, für die $H^{(3)}$ bildet. Wir wissen ferner aus § 6, daß für eine Kurve dritter Ordnung $H^{(3)}$ die Verbindungslinien $|\mathfrak{Q}\mathfrak{q}|$ zweier konjugierten Punkte eine Kurve dritter Klasse $K^{(3)}$ umhüllen, welche die zu $H^{(3)}$ zugehörige Cayleysche Kurve heißt; auch ist der Zusammenhang von $H^{(3)}$ und $K^{(3)}$ oben angegeben worden; wir wollen nunmehr den Zusammenhang dieser beiden Kurven mit der gegebenen $C^{(3)}$, von der sie abhängen, untersuchen.

Auf der Hesseschen Kurve $H^{(3)}$ giebt es unendlich viele Paare von konjugierten Punkten $\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$, welche die Eigenschaft besitzen, daß jeder Punkt der Kurve Strahlenpaare nach ihnen sendet, die eine ihm zugehörige Strahleninvolution bilden. Die Doppelstrahlen derselben umhüllen die $K^{(3)}$ und sind solche Verbindungslinien $|\mathfrak{Q}\mathfrak{q}|$ je eines Paares konjugierter Punkte der $H^{(3)}$. In der zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Strahleninvolution entspricht dem Strahle $|\mathfrak{q}\mathfrak{Q}|$ die Tangente in $\mathfrak{q}$ an der $H^{(3)}$ und diese beiden Strahlen durch $\mathfrak{q}$ trennen die Doppelstrahlen harmonisch. Diese Doppelstrahlen

bilden aber auch, wie wir wissen (§ 6), einen ausgearteten Kegelschnitt des Netzes, und zwar denjenigen, welcher die konische Polare von $\mathfrak{Q}$ ist.

Die Tangente in $\mathfrak{q}$ an $H^{(3)}$ wird von $|\mathfrak{q}\mathfrak{Q}|$ durch die Doppelstrahlen der Involution harmonisch getrennt, ist also die Polare von $\mathfrak{Q}$ in Bezug auf das von den Doppelstrahlen gebildete Linienpaar; sie ist mithin die gerade Polare von $\mathfrak{Q}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$, und wir schließen den Satz:

Die geraden Polaren solcher Punkte $\mathfrak{Q}$, welche die $H^{(3)}$ erfüllen, rücksichtlich der $C^{(3)}$ sind Tangenten der $H^{(3)}$, und zwar in dem jedesmaligen konjugierten Punkte $\mathfrak{q}$ zu $\mathfrak{Q}$, d. h. in dem Doppelpunkte des Linienpaares, in welches $\mathfrak{Q}^{(2)}$ ausartet. Bewegt sich also $\mathfrak{Q}$ auf der $H^{(3)}$, so umhüllt seine gerade Polare q rücksichtlich der $C^{(3)}$ dieselbe Hessesche Kurve $H^{(3)}$ und berührt in dem jedesmaligen konjugierten Punkte $\mathfrak{q}$ zu $\mathfrak{Q}$.

2. Wir haben in § 23, 3. gesehen, daß wenn eine Gerade g der $H^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ begegnet, deren konische Polaren in Linienpaare ausarten mit den Doppelpunkten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, die letzteren paarweise mit je einem der ersteren auf den drei Geraden

$$|\mathfrak{Q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3|,\quad |\mathfrak{Q}_2\mathfrak{q}_3\mathfrak{q}_1|,\quad |\mathfrak{Q}_3\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2|$$

liegen, also die drei Paare konjugierter Punkte $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{Q}_2\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{Q}_3\mathfrak{q}_3$ die sechs Ecken eines der $H^{(3)}$ einbeschriebenen vollständigen Vierseits bilden. Aus § 24, 2. wissen wir, daß die geraden Polaren q_1, q_2, q_3 der Punkte $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ die Polokonik $g^{(2)}$ der Geraden g berühren und zwar bez. in denjenigen drei Punkten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, welche den Punkten $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ konjugiert sind rücksichtlich der $H^{(3)}$; da nun nach dem vorigen Satze (1.) diese Tangenten q_1, q_2, q_3 auch die $H^{(3)}$ berühren in denselben Punkten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, so folgt der Satz:

Die Polokonik $g^{(2)}$ einer Geraden g rücksichtlich der $C^{(3)}$ berührt die Hessesche Kurve $H^{(3)}$ in denjenigen drei Punkten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, welche konjugiert sind rücksichtlich derselben den drei Schnittpunkten der Geraden g mit der $C^{(3)}$.

Die Polokoniken aller Geraden g in der Ebene sind also immer solche Kegelschnitte, welche die $H^{(3)}$ im allgemeinen in drei Punkten berühren und zwar in drei Punkten eines Tripels, wenn die $H^{(3)}$ als Tripelkurve aufgefaßt wird (§ 8).

Diejenigen Eigenschaften, welche wir früher für Tripelpunkte einer $C^{(3)}$ gefunden haben, gelten also jetzt für die Berührungspunkte einer Polokonik mit der $H^{(3)}$.

3. Fallen insbesondere von den drei Schnittpunkten $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ einer Geraden g mit der $H^{(3)}$ zwei zusammen, $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2$, so wird die Polokonik $g^{(2)}$ eine vierpunktige Berührung mit $H^{(3)}$ haben in demjenigen Punkte $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$, welcher dem Punkte $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2$ konjugiert ist.

Die Polokoniken von allen Tangenten der $H^{(3)}$ haben also eine vierpunktige Berührung mit dieser Kurve.

Fallen alle drei Schnittpunkte $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_3$ zusammen, d. h. ist g eine Wendetangente der $H^{(3)}$, so wird die Polokonik $g^{(2)}$ rücksichtlich der $C^{(3)}$ eine sechspunktige Berührung mit der $H^{(3)}$ haben und zwar in demjenigen Punkte derselben, welcher dem Wendepunkte konjugiert ist.

Aus dem in § 24, 5. bewiesenen Satze, daß für jede der beiden Geraden l, l_1, in welche die konische Polare eines Punktes $\mathfrak{Q}$ zerfällt, auch die Polokoniken $l^{(2)}$ und $l_1^{(2)}$ in zwei Linienpaare zerfallen müssen mit dem gemeinsamen Doppelpunkte $\mathfrak{Q}$, ergiebt sich jetzt, weil alle Polokoniken die $H^{(3)}$ berühren, der Satz:

Das Tangentenquadrupel aus einem Punkte $\mathfrak{Q}$ der $H^{(3)}$ an dieselbe besteht aus den beiden Linienpaaren, in welche die Polokoniken derjenigen beiden Geraden ausarten, aus denen die in ein Linienpaar ausartende konische Polare des Punktes $\mathfrak{Q}$ besteht.

Wir können dies Resultat auch so aussprechen:

Von sämtlichen Tangenten der Cayleyschen Kurve $K^{(3)}$ sind die Polokoniken rücksichtlich der $C^{(3)}$ Kegelschnitte, welche in Linienpaare ausarten und die Hessesche Kurve $H^{(3)}$ berühren. Für zwei konjugierte Tangenten der $K^{(3)}$ (d. h. zwei solche, deren Berührungssehne wieder eine Tan-

gente der $K^{(3)}$ ist) haben die beiden in Linienpaare ausartenden Polokoniken denselben Doppelpunkt, der auf $H^{(3)}$ liegt und diese vier Strahlen als Tangenten an die $H^{(3)}$ sendet.

4. Zu jeder Geraden g, welche im allgemeinen der $C^{(3)}$ in drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ begegnet, gehört allemal eine zweite sie begleitende Gerade g', auf welcher die drei Tangentialpunkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ liegen, in denen die Tangenten an $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ der $C^{(3)}$ zum dritten Male begegnen (§ 8, 4.), ebenso wie zu jeder konischen Polare, welche der $C^{(3)}$ in sechs Punkten begegnet, der sie begleitende Kegelschnitt gehört, auf dem die sechs Tangentialpunkte von jenen liegen.

Wir haben nun in § 25 gesehen, daß wenn eine konische Polare zerfällt, auch der begleitende Kegelschnitt in ein Linienpaar mit demselben Doppelpunkt ausartet, können also jetzt sagen:

Die beiden Geraden, in welche eine konische Polare ausartet, haben zwei begleitende Gerade, deren Schnittpunkt auf der $H^{(3)}$ liegt und derjenige Punkt ist, in welchem die ersteren beiden sich schneiden.

Nennen wir den Punkt, in welchem eine Gerade g von der sie begleitenden Geraden g' getroffen wird, den begleitenden Punkt der Geraden g, so können wir auch sagen:

Die beiden Geraden, in welche die konische Polare eines Punktes $\mathfrak{Q}$ der $H^{(3)}$ ausartet, haben beide ihren begleitenden Punkt auf der $H^{(3)}$ in demjenigen Punkte $\mathfrak{q}$, welcher dem Punkte $\mathfrak{Q}$ konjugiert ist, dessen konische Polare in das Linienpaar ausartet.

Da jede der beiden Geraden eines Linienpaares, in welches eine konische Polare ausartet, Tangente der Cayleyschen Kurve $K^{(3)}$ ist, so können wir das vorige Resultat auch so aussprechen:

Jede Tangente der Cayleyschen Kurve $K^{(3)}$ hat ihren begleitenden Punkt auf der Hesseschen Kurve $H^{(3)}$, und dieser ist der dritte Schnittpunkt der Tan-

gente der Cayleyschen Kurve $K^{(3)}$, welche zwei konjugierte Punkte der $H^{(3)}$ verbindet.

Umhüllt also eine Gerade die Cayleysche Kurve $K^{(3)}$, so beschreibt der sie begleitende Punkt die Hessesche Kurve $H^{(3)}$, oder was dasselbe sagt, die Hessesche Kurve $H^{(3)}$ ist der Ort der begleitenden Punkte für alle Tangenten der Cayleyschen Kurve $K^{(3)}$.

Hiernach kann zu einer Tangente der $K^{(3)}$ die sie begleitende Gerade immer reell konstruiert werden, auch wenn die Schnittpunkte derselben mit der $C^{(3)}$ nicht immer alle drei reell sind. Denn die Tangente t der $K^{(3)}$ verbindet zwei konjugierte Punkte der $H^{(3)}$ und hat einen immer reellen Schnittpunkt $\mathfrak{q}$ mit derselben; sie hat ferner mit der $C^{(3)}$ mindestens einen reellen Schnittpunkt $\mathfrak{A}$, dessen Tangentialpunkt $\mathfrak{A}'$ sei; dann ist $|\mathfrak{q}\mathfrak{A}'| = t'$ die begleitende Gerade zu t.

5. Während zu einer gegebenen $C^{(3)}$ nur eine einzige bestimmte $H^{(3)}$ zugehört, nämlich der Ort solcher Punkte, deren konische Polaren in Linienpaare ausarten und zugleich der Ort der Doppelpunkte dieser Linienpaare, findet das Umgekehrte nicht statt. Nehmen wir eine $H^{(3)}$ als gegebene Kurve dritter Ordnung an, so giebt es nicht bloss eine, sondern im allgemeinen drei verschiedene Fundamentalkurven $C^{(3)}$, für welche die gegebene $H^{(3)}$ die Hessesche Kurve ist. Denn die gegebene $H^{(3)}$ hat im allgemeinen nicht bloss ein, sondern drei verschiedene Systeme von Paaren konjugierter Punkte (§ 15). Da ein beliebiger Punkt $\mathfrak{A}$ der $H^{(3)}$ im allgemeinen vier Tangenten an die Kurve sendet, deren Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ seien, die ein vollständiges Viereck mit den drei auf der $C^{(3)}$ liegenden Diagonalpunkten.

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{A}', \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4) = \mathfrak{A}'', \quad (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3) = \mathfrak{A}'''$$

bilden, so erhalten wir die drei Systeme, in denen Paare konjugierter Punkte sind

I.	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}',\ \mathfrak{A}''\mathfrak{A}'''$,
II.	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}'',\ \mathfrak{A}'''\mathfrak{A}'$,
III.	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4,\ \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}''',\ \mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$.



Durch ein Paar konjugierter Punkte ist das ganze System derselben vollständig und eindeutig bestimmt. Jeder Punkt der Kurve sendet nach den Paaren konjugierter Punkte Strahlenpaare einer Involution. Die Doppelstrahlen derselben bilden einen ausgearteten Kegelschnitt, welcher, wenn die Kurve die Hessesche $H^{(3)}$ für eine noch unbekannte Fundamentalkurve $C^{(3)}$ sein soll, die konische Polare desjenigen Punktes rücksichtlich der $C^{(3)}$ sein muß, der dem Schnittpunkt des Linienpaares auf der $H^{(3)}$ konjugiert ist (1.).

Wir können also dem Punkte $\mathfrak{A}$ entweder das Linienpaar $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4|$ mit dem Doppelpunkte $\mathfrak{A}'$ als konische Polare rücksichtlich der zu suchenden Fundamentalkurve $C^{(3)}$ entsprechen lassen (System I), oder das Linienpaar $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3|$, $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_4|$ mit dem Doppelpunkt $\mathfrak{A}''$ (System II), oder endlich das Linienpaar $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4|$, $|\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3|$ mit dem Doppelpunkt $\mathfrak{A}'''$ (System III).

Nehmen wir jetzt einen zweiten Punkt $\mathfrak{B}$ der $H^{(3)}$ und machen dieselbe Operation, so ist in jedem der drei Systeme sein konjugierter Punkt $\mathfrak{B}'$ (oder $\mathfrak{B}''$ oder $\mathfrak{B}'''$) eindeutig bestimmt und ebenso auch seine konische Polare rücksichtlich der zu suchenden Fundamentalkurve (§§ 13 u. 14). Wir erhalten also den drei Systemen I, II, III entsprechend drei bestimmte Netze von konischen Polaren. Zu jedem derselben können wir nunmehr nach § 24, 4. die Fundamentalkurve $C^{(3)}$ herstellen, für welche das Netz das der konischen Polaren ist. Wir schließen also das Resultat:

Zu einer gegebenen Kurve dritter Ordnung, als Hessesche Kurve $H^{(3)}$ aufgefaßt, giebt es im allgemeinen drei Fundamentalkurven $C^{(3)}$, für welche die gegebene die zugehörige Hessesche ist.

§ 28. Die Wendepunkte der $C^{(3)}$.

1. Wir sind bereits von zwei verschiedenen Seiten zu den Wendepunkten der $C^{(3)}$ gelangt; einmal sahen wir in § 7, daß die beiden Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ (letztere umhüllt von den Doppelstrahlen aller den Punkten der $C^{(3)}$ zuge-

hörigen Strahleninvolutionen) sich in neun Punkten berühren und die zu diesen Berührungspunkten konjugierten Punkte die Wendepunkte der $C^{(3)}$ sind; zweitens sahen wir in § 23, 6., daß eine $C^{(3)}$ und ihre Hessesche Kurve $H^{(3)}$ sich in den Wendepunkten schneiden. Wir wollen nun den Zusammenhang der neun Wendepunkte unter einander aufsuchen und dadurch zugleich die Frage nach der Realität derselben beantworten.

Nennen wir einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ den Punkt $\mathfrak{T}$, dann ist sein konjugierter Punkt $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{W}$ ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ (§ 7). Sei ferner $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{W}'$ ein zweites derartiges Paar konjugierter Punkte der $C^{(3)}$, so folgt aus ihnen allemal ein drittes, wie wir wissen, nämlich

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{T}',\ \mathfrak{W}\mathfrak{W}') = \mathfrak{W}''$$

und

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{W}',\ \mathfrak{T}'\mathfrak{W}) = \mathfrak{T}''.$$

Da aber $\mathfrak{W}$ gleichzeitig der Tangentialpunkt von $\mathfrak{T}$ ist (§ 7), d. h. die Tangente in $\mathfrak{T}$ der $C^{(3)}$ in dem dritten Punkt $\mathfrak{W}$ begegnet, ebenso die Tangente in $\mathfrak{T}'$ der $C^{(3)}$ in $\mathfrak{W}'$ begegnet, so muß auch die Tangente in dem dritten Schnittpunkte von $|\mathfrak{T}\mathfrak{T}'|$ mit der $C^{(3)}$, d. h. in $\mathfrak{W}''$ der $C^{(3)}$ in demjenigen Punkte begegnen, in welchem $|\mathfrak{W}\mathfrak{W}'|$ sie zum dritten Mal schneidet, d. h. in $\mathfrak{W}''$ selbst, also ist $\mathfrak{W}''$ ein dritter Wendepunkt der $C^{(3)}$, weil seine Tangente drei zusammenfallende Punkte mit derselben gemein hat.

Da ferner die Tangente in $\mathfrak{T}$ der $C^{(3)}$ in $\mathfrak{W}$ begegnet, die Tangente in $\mathfrak{W}'$ der $C^{(3)}$ wieder in $\mathfrak{W}'$ begegnet, so muß die Tangente in $\mathfrak{T}''$ der $C^{(3)}$ in dem dritten Schnittpunkte von $|\mathfrak{W}\mathfrak{W}'|$ mit der $C^{(3)}$, d. h. in dem Punkte $\mathfrak{W}''$ begegnen; also ist $\mathfrak{W}''$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{T}''$ und zugleich der konjugierte Punkt, mithin $\mathfrak{T}''$ einer der gemeinschaftlichen Punkte von $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$, in dem sich diese beiden Kurven berühren; mithin gilt der doppelte Satz:

Die Verbindungslinie zweier verschiedenen Wendepunkte einer $C^{(3)}$ trifft dieselbe allemal in einem dritten Wendepunkte derselben. Die Ver-

bindungslinie zweier verschiedenen gemeinsamen Punkte der $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ trifft die $C^{(3)}$ allemal in einem Wendepunkte derselben.

Wir können hiernach sowohl aus zwei Wendepunkten der $C^{(3)}$ allemal einen dritten ableiten, als auch aus zwei gemeinschaftlichen (Berührungs-) Punkten der $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ einen Wendepunkt derselben finden, oder auch als konjugierten Punkt zu letzterem einen dritten Berührungspunkt der Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ ermitteln.

2. Da die Wendepunkte der $C^{(3)}$ nach dem vorigen Satze immer zu je dreien auf einer Geraden liegen, so können durch einen Wendepunkt nicht mehr als vier solcher Geraden gehen, deren jede außer dem ersten noch zwei weitere Wendepunkte der $C^{(3)}$ enthält; denn es giebt nur neun Wendepunkte, also außer dem zuerst angenommenen nur noch acht.

Hiernach scheint es $9 . 4 = 36$ solcher Geraden zu geben, die je drei Wendepunkte enthalten; da aber jede Gerade hierbei dreimal auftreten muß, nämlich bei jedem der drei Wendepunkte, welche sie enthält, einmal, so reduziert sich die vorige Anzahl auf zwölf, also:

Die neun Wendepunkte einer $C^{(3)}$ liegen zu je dreien auf zwölf Geraden (Wendepunktslinien), indem durch jeden Wendepunkt vier Wendepunktslinien gehen.

Gehen wir von einer Wendepunktslinie aus, auf welcher die drei Wendepunkte

$$\mathfrak{W}_1^1, \mathfrak{W}_1^2, \mathfrak{W}_1^3$$

liegen mögen, so gehen durch $\mathfrak{W}_1^1$ noch drei übrige Wendepunktslinien, deren jede zwei weitere Wendepunkte enthält; ebenso durch $\mathfrak{W}_1^2$ und durch $\mathfrak{W}_1^3$; wir haben also schon zehn Wendepunktslinien und es bleiben also nur noch zwei übrig, die durch keinen der drei Wendepunkte $\mathfrak{W}_1^1$, $\mathfrak{W}_1^2$, $\mathfrak{W}_1^3$ gehen können; sei eine derselben diejenige, welche drei Wendepunkte

$$\mathfrak{W}_2^1, \mathfrak{W}_2^2, \mathfrak{W}_2^3$$

enthält, dann haben wir jetzt elf Wendepunktslinien, nämlich die beiden



$$|\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_1^3|,$$
$$|\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_2^3|,$$

und die neun Verbindungslinien je eines der drei ersten mit einem der drei letzten Punkte; es bleibt daher nur noch eine einzige, zwölfte Wendepunktslinie übrig, die durch keinen der früheren sechs Wendepunkte gehen kann, folglich die drei letzten Wendepunkte

$$\mathfrak{W}_3^1,\ \mathfrak{W}_3^2,\ \mathfrak{W}_3^3$$

enthalten muß.

Ein solches Dreiseit, welches von den drei Geraden

$$|\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_1^3|,\ |\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_2^3|,\ |\mathfrak{W}_3^1\mathfrak{W}_3^2\mathfrak{W}_3^3|$$

gebildet wird, wollen wir ein Wendepunktsdreiseit nennen von der Beschaffenheit, daß jede Seite desselben drei verschiedene Wendepunkte enthält, also sämtliche Wendepunkte erschöpft werden und zu je dreien in den Seiten des Dreiseits liegen.

Aus diesem Wendepunktsdreiseit erhalten wir nun die neun noch fehlenden Wendepunktslinien auf folgende Art:

Die Verbindungslinie $|\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^1|$ muß noch einen dritten Wendepunkt enthalten, der auf der dritten Seite des Wendepunktsdreiseits liegen muß; wir können ihn $\mathfrak{W}_3^1$ nennen; ebenso wird die Verbindungslinie $|\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^2|$ einen dritten Wendepunkt enthalten, den wir $\mathfrak{W}_3^2$ nennen und von dem vorigen $\mathfrak{W}_3^1$ verschieden annehmen dürfen; endlich wird $|\mathfrak{W}_1^3\mathfrak{W}_2^3|$ noch einen dritten Wendepunkt enthalten, den wir $\mathfrak{W}_3^3$ nennen können; jetzt sind aber alle Wendepunkte erschöpft; ziehen wir also $|\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^2|$, so kann die Verbindungslinie als dritten Wendepunkt weder $\mathfrak{W}_3^1$ noch $\mathfrak{W}_3^2$ enthalten, weil sonst vier Wendepunkte auf einer Geraden liegen würden, was widersinnig ist; es muß also $|\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^2|$ den dritten Wendepunkt $\mathfrak{W}_3^3$ enthalten; ebenso muß

$\lvert\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^3\rvert$	den dritten Wendepunkt	$\mathfrak{W}_3^2$,
$\lvert\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^1\rvert$	„ „ „	$\mathfrak{W}_3^3$,
$\lvert\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^3\rvert$	„ „ „	$\mathfrak{W}_3^1$,
$\lvert\mathfrak{W}_1^3\mathfrak{W}_2^1\rvert$	„ „ „	$\mathfrak{W}_3^2$,
$\lvert\mathfrak{W}_1^3\mathfrak{W}_2^2\rvert$	„ „ „	$\mathfrak{W}_3^1$

enthalten. Wir erhalten hiernach folgende zwölf Wendepunktslinien, welche wir gleichzeitig als vier Wendepunktsdreiseite ordnen

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_1^3 & \mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_3^1 & \mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_3^3 & \mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^3\mathfrak{W}_3^2 \\
\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_2^3 & \mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_3^2 & \mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^3\mathfrak{W}_3^1 & \mathfrak{W}_1^3\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_3^1 \\
\mathfrak{W}_3^1\mathfrak{W}_3^2\mathfrak{W}_3^3 & \mathfrak{W}_1^3\mathfrak{W}_2^3\mathfrak{W}_3^3 & \mathfrak{W}_1^3\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_3^2 & \mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_3^3,
\end{array}$$

d. h.:

Die neun Wendepunkte einer $C^{(3)}$ liegen zu je dreien auf zwölf Geraden, von denen immer vier durch jeden der neun Wendepunkte gehen. Diese zwölf Wendepunktslinien lassen sich auf vier Arten zu je dreien so ordnen, daß diese ein Wendepunktsdreiseit bilden, dessen drei Seiten je drei, also sämtliche neun Wendepunkte enthalten. Es giebt also vier Wendepunktsdreiseite. Diese merkwürdige Konfiguration von Punkten und Geraden in der Ebene ist leider nicht vollständig reell, wie wir sogleich sehen werden.

3. Nennen wir die drei Seiten eines Wendepunktsdreiseits

$$|\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_1^3| = s_1,$$
$$|\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_2^3| = s_2,$$
$$|\mathfrak{W}_3^1\mathfrak{W}_3^2\mathfrak{W}_3^3| = s_3,$$

und die Ecken desselben

$$(s_2 s_3) = \mathfrak{A}_{23},\ (s_3 s_1) = \mathfrak{A}_{31},\ (s_1 s_2) = \mathfrak{A}_{12},$$

so befinden sich auf jeder Seite fünf Punkte, nämlich die beiden Ecken des Wendepunktsdreiseits und die drei Wendepunkte, welche diese Seite enthält.

Projizieren wir diese fünf Punkte der Seite s_2

$$\mathfrak{W}_2^1,\ \mathfrak{W}_2^2,\ \mathfrak{W}_2^3,\ \mathfrak{A}_{21},\ \mathfrak{A}_{23}$$

von den drei Wendepunkten

$$\mathfrak{W}_1^1,\ \mathfrak{W}_1^2,\ \mathfrak{W}_1^3$$

der Seite s_1 aus auf die Seite s_3, so erhalten wir auf derselben drei projektive Punktreihen desselben Trägers, die so lauten

$$(\mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{A}_{31} \mathfrak{A}_{32})$$
$$\barwedge (\mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{A}_{31} \mathfrak{A}_{32})$$
$$\barwedge (\mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{A}_{31} \mathfrak{A}_{32}),$$

die sich auch so schreiben lassen

$$(\mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{A}_{31} \mathfrak{A}_{32})$$
$$\barwedge (\mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{A}_{31} \mathfrak{A}_{32})$$
$$\barwedge (\mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{A}_{31} \mathfrak{A}_{32}).$$

Wir erkennen hieraus die cyklischen Projektivitäten

$$(\mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_3^3) \barwedge (\mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{W}_3^1) \barwedge (\mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{W}_3^2),$$

deren Doppelpunkte $\mathfrak{A}_{31}$ und $\mathfrak{A}_{32}$ sind; also bilden diese fünf Punkte auf der Geraden s_3 ein äquianharmonisches System, wie wir in § 21, 3. gesehen haben, und von dem wir wissen, daß wenn die drei bestimmenden Punkte $\mathfrak{W}_3^1$, $\mathfrak{W}_3^2$, $\mathfrak{W}_3^3$ reell sind, die beiden Doppelpunkte $\mathfrak{A}_{31}$, $\mathfrak{A}_{32}$ konjugiert-imaginär sein müssen; dagegen wenn von den drei Punkten $\mathfrak{W}_3^1$, $\mathfrak{W}_3^2$, $\mathfrak{W}_3^3$ nur einer reell und die beiden andern konjugiert-imaginär sind, die beiden Doppelpunkte $\mathfrak{A}_{31}$, $\mathfrak{A}_{32}$ reell sein müssen. Wir haben also das Ergebnis:

Auf jeder der drei Seiten eines Wendepunktsdreiseits bilden die drei in ihr liegenden Wendepunkte und die beiden Ecken des Dreiseits ein äquianharmonisches System von fünf Punkten. Oder:

Bildet man aus den drei auf einer Wendepunktslinie liegenden Wendepunkten eine cyklische Projektivität, so sind die Doppelpunkte derselben die Schnittpunkte der beiden übrigen Wendepunktslinien, welche mit der ersteren ein Wendepunktsdreiseit bilden.

3. Aus der Natur eines äquianharmonischen Systems, welche wir in § 21, 3. näher studiert haben, geht hervor, daß mehr als drei Wendepunkte nicht reell sein können und diese auf einer Geraden liegen müssen; denn wären drei Wendepunkte reell, die nicht auf einer Geraden lägen, so würden die drei Verbindungslinien je zweier drei neue reelle Wendepunkte liefern, und diese mit den ersteren in der einzig noch möglichen Weise verbunden, die drei letzten

Wendepunkte; es müßten also sämtliche neun Wendepunkte reell sein, mithin auch sämtliche vier Wendepunktsdreiseite und deren Ecken; dann hätten wir aber äquianharmonische Systeme von fünf reellen Elementen, was unmöglich ist, also ist unsere Annahme unzutreffend, und es können höchstens drei auf einer Geraden liegende Wendepunkte reell sein.

Aus ähnlichen Gründen kann auch höchstens nur ein Wendepunktsdreiseit vollständig reell sein. Denn wären zwei Wendepunktsdreiseite vollständig reell, so wären auch ihre sechs Ecken reell; die drei Punkte, in welchen eine Seite des zweiten den drei Seiten des ersten begegnet, sind aber drei Wendepunkte; also hätten wir auf derselben fünf reelle Elemente eines äquianharmonischen Systems, was widersinnig ist; also es kann höchstens ein Wendepunktsdreiseit vollständig reell sein; dann enthält jede Seite desselben nur einen reellen und zwei konjugiert-imaginäre Wendepunkte, und die drei reellen Wendepunkte liegen auf einer Geraden; es kann also höchstens nur vier reelle Wendepunktslinien geben, von denen drei das reelle Wendepunktsdreiseit bilden.

4. Daß nun diese einzig möglichen Fälle wirklich eintreten, wollen wir unter der Voraussetzung, daß mindestens ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ immer reell sein muß, nachweisen. Die Existenz mindestens eines reellen Wendepunktes wird nachträglich erwiesen werden.

Gruppieren wir, wie in 2. die neun Wendepunkte auf den zwölf Wendepunktslinien, die wir jetzt besonders bezeichnen wollen, um ihre Realität zu erkennen, in folgender Weise

$$\left.\begin{array}{l} |\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_1^3| = s_1 \\ |\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_2^3| = s_2 \\ |\mathfrak{W}_3^1\mathfrak{W}_3^2\mathfrak{W}_3^3| = s_3 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} |\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_3^1| = t_1 \\ |\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_3^2| = t_2 \\ |\mathfrak{W}_1^3\mathfrak{W}_2^3\mathfrak{W}_3^3| = t_3 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} |\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_3^3| = u_1 \\ |\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^3\mathfrak{W}_3^1| = u_2 \\ |\mathfrak{W}_1^3\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_3^2| = u_3 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} |\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^3\mathfrak{W}_3^2| = v_1 \\ |\mathfrak{W}_1^3\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{W}_3^1| = v_2 \\ |\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_3^3| = v_3 \end{array}\right\},$$

so folgt hieraus



$$\begin{cases} \mathfrak{W}_1^1 = (s_1 t_1 u_1 v_1), & \mathfrak{W}_1^2 = (s_1 t_2 u_2 v_3), & \mathfrak{W}_1^3 = (s_1 t_3 u_3 v_2), \\ \mathfrak{W}_2^1 = (s_2 t_1 u_3 v_3), & \mathfrak{W}_2^2 = (s_2 t_2 u_1 v_2), & \mathfrak{W}_2^3 = (s_2 t_3 u_2 v_1), \\ \mathfrak{W}_3^1 = (s_3 t_1 u_2 v_2), & \mathfrak{W}_3^2 = (s_3 t_2 u_3 v_1), & \mathfrak{W}_3^3 = (s_3 t_3 u_1 v_3) \end{cases}$$

und hierdurch ist die ganze Konfiguration gegeben. Nehmen wir nun an, daß wenigstens einer der neun Wendepunkte reell sei, nämlich

$$\mathfrak{W}_1^1,$$

dann gehen von ihm aus nach den Punkten

$$\mathfrak{W}_2^1,\ \mathfrak{W}_2^2,\ \mathfrak{W}_2^3$$

die drei Strahlen

$$t_1,\ u_1,\ v_1,$$

welche in cyklisch-projektive Beziehung gesetzt zwei Doppelstrahlen liefern, von denen der eine s_1 sein muß und der andere den Schnittpunkt $(s_3 s_2)$ mit dem Punkte $\mathfrak{W}_1^1$ verbindet; diese wollen wir zur Abkürzung

$$s_1' = |\, \mathfrak{W}_1^1 (s_2 s_3) \,|$$

nennen. Die fünf Strahlen

$$t_1,\ u_1,\ v_1,\ s_1,\ s_1'$$

eines äquianharmonischen Strahlensystems müssen von der Beschaffenheit sein, daß entweder t_1, u_1, v_1 reell, s_1, s_1' konjugiert-imaginär sind, oder s_1, s_1' reell und von t_1, u_1, v_1 nur einer reell und die beiden andern konjugiert-imaginär sind. Die erstere Annahme ist, wie wir jetzt sehen werden, unzulässig; denn wären t_1, u_1, v_1 alle drei reelle Strahlen, so könnte doch nur einer derselben drei reelle Wendepunkte enthalten, die beiden andern müßten außer dem reellen Wendepunkt $\mathfrak{W}_1^1$ je zwei konjugiert-imaginäre Wendepunkte enthalten; seien diese

$$u_1 = |\, \mathfrak{W}_2^2 \mathfrak{W}_3^3 \,| \quad \text{und} \quad v_1 = |\, \mathfrak{W}_2^3 \mathfrak{W}_3^2 \,|.$$

Die vier imaginären Punkte $\mathfrak{W}_2^2$, $\mathfrak{W}_3^3$ und $\mathfrak{W}_2^3$, $\mathfrak{W}_3^2$ liegen also auf einem reellen Linienpaar und bilden ein imaginäres vollständiges Viereck, von dem bekanntlich die drei Diagonalpunkte reell sein müssen und von dem ein Seitenpaar reell ist, die beiden andern konjugiert-imaginär sind; die reellen Diagonalpunkte können in bekannter Weise konstruiert werden, sie sind nun

$$(\mathfrak{W}_2^2 \mathfrak{W}_2^3,\ \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_3^3) = (s_2 s_3),$$
$$(\mathfrak{W}_2^2 \mathfrak{W}_3^2,\ \mathfrak{W}_2^3 \mathfrak{W}_3^3) = (t_2 t_3);$$

der Punkt $(s_2 s_3)$ müßte also reell sein, folglich auch der Strahl s_1', mithin auch der andere Doppelstrahl s_1 der cyklisch-projektiven Büschel, also alle fünf Elemente des äquianharmonischen Systems müßten reell sein, was widersinnig ist.

In gleicher Weise würden wir auf einen Widerspruch kommen, wenn wir annehmen, daß t_1 und v_1 oder t_1 und u_1 zwei reelle Strahlen wären, welche je zwei konjugiert-imaginäre Wendepunkte enthalten; es ist also die Annahme, daß alle drei Strahlen t_1, u_1, v_1 gleichzeitig reell sind, unzulässig und es bleibt nur die Möglichkeit übrig, daß einer derselben reell, die beiden andern konjugiert-imaginär sind. Dann müssen die beiden Doppelstrahlen s_1, s_1' reell sein. Da dies für den reellen Wendepunkt $\mathfrak{W}_1^1$ nachgewiesene Resultat für jeden reellen Wendepunkt gelten muß, so können wir den Satz aussprechen:

Durch einen reellen Wendepunkt der $C^{(3)}$ gehen immer vier Wendepunktslinien, von denen zwei reell und die beiden andern konjugiert-imaginär sein müssen.

5. Wir schließen weiter, indem wir von den drei Strahlen t_1, u_1, v_1, den ersten t_1 als den reellen und die beiden andern u_1, v_1 als die konjugiert-imaginären annehmen, und betrachten das von den vier imaginären Wendepunkten auf u_1, v_1

$$\mathfrak{W}_2^2,\ \mathfrak{W}_3^3,\ \mathfrak{W}_2^3,\ \mathfrak{W}_3^2$$

gebildete vollständige Viereck, welches durch ein imaginäres Linienpaar verbunden wird; dasselbe hat drei reelle Diagonalpunkte

$$\mathfrak{W}_1^1 = (u_1 v_1),\quad (s_2 s_3),\quad (t_2 t_3);$$

in dem ersten kreuzt sich ein imaginäres Seitenpaar dieses vollständigen Vierecks, folglich muß sich in dem zweiten auch ein imaginäres und in dem dritten ein reelles Seitenpaar kreuzen, denn das dritte Seitenpaar ist immer eine Folge der beiden ersten, und sind diese beiden konjugiert-



imaginär (vertreten durch zwei elliptische Strahleninvolutionen), so muß das dritte Seitenpaar reell sein, als Doppelstrahlen einer in bekannter Weise zu konstruierenden hyperbolischen Strahleninvolution.

Es muß also von den beiden Strahlenpaaren

$$s_2 \text{ und } s_3, \quad t_2 \text{ und } t_3$$

das eine reell, das andere konjugiert-imaginär sein; nennen wir das reelle s_2 und s_3, dann muß auch auf s_2 der dritte Wendepunkt $\mathfrak{W}_2^1$ und auf s_3 der dritte Wendepunkt $\mathfrak{W}_3^1$ reell sein und wir haben die reelle Wendepunktslinie

$$t_1 = | \mathfrak{W}_1^1 \mathfrak{W}_2^1 \mathfrak{W}_3^1 |,$$

also die vier reellen Wendepunktslinien

$$s_1, \ s_2, \ s_3, \ t_1$$

von denen s_1, s_2, s_3 ein reelles Wendepunktsdreiseit bilden.

Von den neun Wendepunkten sind also nur die drei

$$\mathfrak{W}_1^1, \ \mathfrak{W}_2^1, \ \mathfrak{W}_3^1$$

reell, welche auf der Wendepunktslinie t_1 liegen, die übrigen sechs müssen paarweise konjugiert-imaginär sein, nämlich

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{W}_1^3 & \text{auf } s_1, \\ \mathfrak{W}_2^2 \mathfrak{W}_2^3 & \quad \text{„} \quad s_2, \\ \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_3^3 & \quad \text{„} \quad s_3. \end{array}$$

Von den zwölf Wendepunktslinien sind die vier

$$s_1, \ s_2, \ s_3, \ t_1$$

reell; die übrigen müssen auch paarweise konjugiert-imaginär sein, nämlich t_2 und t_3 haben nur den einen reellen Schnittpunkt

$$(t_2 t_3)$$

und es ist

$$(u_1 v_1) = \mathfrak{W}_1^1, \quad (u_2 v_2) = \mathfrak{W}_3^1, \quad (u_3 v_3) = \mathfrak{W}_2^1;$$

die elliptischen Strahleninvolutionen, deren imaginäre Doppelstrahlen $u_1 v_1$, $u_2 v_2$, $u_3 v_3$ sind, lassen sich aber reell konstruieren.

Wir haben demgemäß unter der Voraussetzung, daß immer mindestens einer ($\mathfrak{W}_1^1$) der neun Wendepunkte einer $C^{(3)}$ reell sei, was später (§ 30) nachgewiesen werden soll, folgende Lage der Wendepunkte ermittelt:

Von den neun Wendepunkten sind drei reell und liegen auf einer Geraden (Wendepunktslinie), die übrigen sechs sind paarweise konjugiert-imaginär und liegen auf drei reellen Geraden, deren jede durch einen der drei reellen Wendepunkte geht und außer diesem zwei weitere konjugiert-imaginäre Wendepunkte enthält. Diese drei reellen Wendepunktslinien bilden das einzige reelle Wendepunktsdreiseit; es giebt also, indem wir zu ihnen die erste Wendepunktslinie hinzufügen, nur vier reelle Wendepunktslinien, die übrigen acht sind paarweise konjugiert-imaginär, nämlich durch jeden der drei reellen Wendepunkte gehen außer den beiden reellen Wendepunktslinien noch je zwei konjugiert-imaginäre Wendepunktslinien, was zusammen sechs macht. Das letzte Paar zweier konjugiert-imaginärer Wendepunktslinien hat zum reellen Doppelpunkt denjenigen gegenüberliegenden Eckpunkt eines Wendepunktsdreiseits, von welchem nur eine Seite reell ist, auf der die drei reellen Wendepunkte liegen, und die beiden andern Seiten konjugiert-imaginär sind.

Daß von den neun Wendepunkten einer $C^{(3)}$ mindestens einer reell sein muß, folgt schon daraus, daß ihre Anzahl eine ungerade ist und sie die Durchschnittspunkte der beiden reellen Kurven $C^{(3)}$ und $H^{(3)}$ sind; doch wird der strengere Nachweis später (§ 30) geliefert werden.*

* Die hier gegebene Ableitung der gegenseitigen Lage der neun Wendepunkte ist aus einer Bemerkung von A. Clebsch entsprungen in seiner Abhandlung: „Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Kurven dritter Ordnung“ (Borchardts Journal f. Math. Bd. 63 S. 120). Vergl. auch die neuerdings erschienene Inaugural-Dissertation von A. Witting: „Über eine der Hesseschen Konfiguration der ebenen Kurve dritter Ordnung analoge Konfiguration im Raume“ (Dresden 1887).

§ 29. Beziehungen zwischen den Wendepunkten, den Wendetangenten und den harmonischen Polaren der Wendepunkte.

1. Wir haben in § 10, 1. gesehen, daß die neun Durchschnittspunkte zweier Kurven dritter Ordnung eine Gruppe von neun associierten Punkten bilden, d. h. die Eigenschaft besitzen, daß jede Kurve dritter Ordnung, welche durch acht derselben geht, auch durch den neunten (notwendigen) Punkt hindurchgehen muß. Da nun die drei Seiten des einen reellen Wendepunktsdreiseits (§ 28, 5.) eine spezielle Kurve dritter Ordnung bilden, die durch die Wendepunkte der $C^{(3)}$ hindurchgeht, so folgt:

Die neun Wendepunkte der $C^{(3)}$ bilden eine Gruppe von neun associierten Punkten. (S. 198.)

Wir haben ferner in § 23, 6. gesehen, daß für einen Wendepunkt $\mathfrak{W}$ einer $C^{(3)}$ seine konische Polare in ein Linienpaar ausartet, dessen einer Teil die Tangente $t_{\mathfrak{W}}$ im Wendepunkt und dessen anderer Teil eine bestimmte Gerade w, die harmonische Polare des Wendepunkts ist, der Ort der vierten harmonischen Punkte auf allen durch $\mathfrak{W}$ gezogenen Strahlen, welche von $\mathfrak{W}$ harmonisch getrennt werden durch jedes Paar von den beiden übrigen Schnittpunkten des Strahles mit der $C^{(3)}$. (Diese vierten harmonischen Punkte sind immer reell, sobald $\mathfrak{W}$ reell ist, auch wenn die beiden übrigen Schnittpunkte des Strahles mit der $C^{(3)}$ konjugiert-imaginär sind.) Auch gilt das Umgekehrte: Wenn für einen Punkt $\mathfrak{W}$ der $C^{(3)}$ die konische Polare in ein Linienpaar ausartet, so ist $\mathfrak{W}$ ein Wendepunkt, und das Linienpaar die Wendetangente $t_{\mathfrak{W}}$ und die harmonische Polare w.

Da nun in dem Büschel von Kurven dritter Ordnung, dessen neun Grundpunkte die Wendepunkte der $C^{(3)}$ sind, durch jeden Wendepunkt $\mathfrak{W}$ vier Wendepunktslinien gehen, welche in je zwei weiteren Wendepunkten der $C^{(3)}$ begegnen, so liegen die zugeordneten vierten harmonischen Punkte auf der harmonischen Polare w. Für jede andere Kurve dritten

Grades, die dem Büschel angehört, bleibt also die harmonische Polare w ungeändert, folglich muß auch für diese der Punkt $\mathfrak{W}$ ein Wendepunkt sein, weil seine konische Polare in ein Linienpaar ausartet, also:

Für jede Kurve dritter Ordnung des Büschels, dessen Grundpunkte die neun Wendepunkte einer $C^{(3)}$ sind, sind diese Punkte gleichzeitig die Wendepunkte derselben.

Unter den Kurven dieses Büschels, welches ein syzygetisches genannt wird, kommen insbesondere vier Linientripel vor, die Seiten der vier Wendepunktsdreiseite, sowie auch die Hessesche Kurve $H^{(3)}$ (§ 23, 6.).

2. Die harmonische Polare w eines Wendepunktes $\mathfrak{W}$ enthält, wie wir wissen, die Berührungspunkte der drei übrigen Tangenten (außer der Wendetangente $t_{\mathfrak{W}}$ selbst), welche sich von $\mathfrak{W}$ an die $C^{(3)}$ legen lassen. Ziehen wir nun durch $\mathfrak{W}$ zwei beliebige Strahlen, welche in $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ der $C^{(3)}$ noch begegnen mögen, dann wird die harmonische Polare w dadurch zu finden sein, daß wir die beiden Punkte

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1) \text{ und } (\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b})$$

ermitteln, deren Verbindungslinie bekanntlich durch die vierten harmonischen Punkte zu $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, dem $\mathfrak{W}$ zugeordnet, gehen muß, also die harmonische Polare w ist.

Lassen wir aber dem Strahle $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$ den Strahl $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ unendlich nahe rücken, so geht $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ in die Tangente für $\mathfrak{a}$, $|\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|$ in die Tangente für $\mathfrak{a}_1$ an der $C^{(3)}$ über, der Schnittpunkt beider Tangenten liegt also auf der harmonischen Polare, und es gilt der Satz:

Zieht man durch einen Wendepunkt $\mathfrak{W}$ der $C^{(3)}$ einen veränderlichen Strahl und in den beiden übrigen Schnittpunkten desselben mit der $C^{(3)}$ die beiden Tangenten, so bewegt sich der Schnittpunkt derselben auf einer Geraden, der harmonischen Polare des Wendepunktes $\mathfrak{W}$.

Rücksichtlich eines Wendepunktes besitzt also die $C^{(3)}$ dieselbe Eigenschaft, wie der Kegelschnitt rücksichtlich



jedes Punktes der Ebene und der ihm zugehörigen Polare.

Zieht man insbesondere durch 𝔚 eine Wendepunktslinie, welche also zwei weitere Wendepunkte der $C^{(3)}$ enthält, so müssen die Wendetangenten derselben sich auf der harmonischen Polare des ersten Wendepunkts schneiden, also:

Der Schnittpunkt zweier Wendetangenten liegt auf der harmonischen Polare des dritten Wendepunkts, in welchem die Verbindungslinie der beiden ersten Wendepunkte der $C^{(3)}$ begegnet.

Zieht man durch einen Wendepunkt 𝔚 der $C^{(3)}$ drei beliebige Sekanten

$$|\mathfrak{W}\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{W}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|, \quad |\mathfrak{W}\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''|,$$

so können diese als eine ausgeartete Kurve dritter Ordnung aufgefaßt werden; die neun Durchschnittspunkte derselben mit der $C^{(3)}$ haben nun die drei Punkte 𝔚, 𝔚, 𝔚 (zusammenfallend) auf einer Geraden, folglich müssen die sechs übrigen auf einem Kegelschnitt liegen, also:

Zieht man durch einen Wendepunkt einer $C^{(3)}$ drei beliebige Sekanten

$$|\mathfrak{W}\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{W}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|, \quad |\mathfrak{W}\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''|,$$

so liegen die sechs übrigen Durchschnittspunkte derselben mit der $C^{(3)}$ auf einem Kegelschnitt, dessen Polare von dem Punkte 𝔚 die harmonische Polare des Wendepunkts 𝔚 ist.

Liegen insbesondere 𝔄, 𝔄′, 𝔄″ auf einer Geraden, so müssen auch 𝔅, 𝔅′, 𝔅″ auf einer Geraden liegen. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Schneidet eine beliebige Gerade die $C^{(3)}$ in den drei Punkten 𝔄, 𝔄′, 𝔄″ und werden dieselben mit einem Wendepunkt 𝔚 durch drei Strahlen verbunden, so liegen deren dritte Schnittpunkte auf einer zweiten Geraden, und der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist ein Punkt der harmonischen Polare des Wendepunkts 𝔚.

3. Ist 𝔚 ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ und w seine harmonische Polare, so wird für einen durch 𝔚 gezogenen

Strahl $|\mathfrak{W}\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ die Tangente in $\mathfrak{A}$ die Gerade w in demselben Punkte $\mathfrak{P}$ treffen, wie die Tangente in $\mathfrak{B}$, wie wir in 2. gesehen haben; also wird auch umgekehrt, wenn von einem Punkte $\mathfrak{P}$ der Geraden w eine Tangente $|\mathfrak{P}\mathfrak{A}|$ an die $C^{(3)}$ geht, noch eine zweite Tangente $|\mathfrak{P}\mathfrak{B}|$ an dieselbe gehen müssen, so daß die Berührungssehne $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ durch $\mathfrak{W}$ geht. Geht aus $\mathfrak{P}$ noch eine andere Tangente $|\mathfrak{P}\mathfrak{A}'|$ an die $C^{(3)}$, so wird auch noch eine weitere Tangente $|\mathfrak{P}\mathfrak{B}'|$ an die $C^{(3)}$ gehen, sodaß $|\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|$ ebenfalls durch $\mathfrak{W}$ geht, und geht endlich aus $\mathfrak{P}$ noch eine dritte Tangente $|\mathfrak{P}\mathfrak{A}''|$ an die $C^{(3)}$, so wird noch eine andere Tangente $|\mathfrak{P}\mathfrak{B}''|$ an dieselbe gehen, sodaß $|\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''|$ auch durch $\mathfrak{W}$ geht. Die sechs Tangenten, welche sich im allgemeinen aus einem Punkte $\mathfrak{P}$ der Geraden w an die $C^{(3)}$ legen lassen, zerfallen also in drei Paare

$|\mathfrak{P}\mathfrak{A}|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{P}\mathfrak{A}'|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{B}'|$, $|\mathfrak{P}\mathfrak{A}''|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{B}''|$,

und die drei Berührungssehnen

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|, \quad |\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''|$$

gehen durch denselben Punkt $\mathfrak{W}$.

Da nun, wie wir wissen, die sechs Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$ auf einem Kegelschnitt liegen müssen (2.), der die konische Polare $\mathfrak{P}^{(2)}$ des Punktes $\mathfrak{P}$ ist, so bilden die vorigen drei Strahlenpaare eine Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die beiden Geraden $|\mathfrak{P}\mathfrak{W}|$ und w sind. Für diesen Kegelschnitt sind also $\mathfrak{W}$ und w Pol und Polare. Wir können also den Satz aussprechen:

Für alle Punkte $\mathfrak{P}$ der harmonischen Polare w eines Wendepunkts $\mathfrak{W}$ bilden die konischen Polaren $\mathfrak{P}^{(2)}$ ein Kegelschnittbüschel, welches $\mathfrak{W}$ und w gemeinsam zu Pol und Polare hat. Die geraden Polaren für alle Punkte $\mathfrak{P}$ von w laufen daher sämtlich durch den Wendepunkt $\mathfrak{W}$.

4. Aus der Konfiguration der Wendepunkte, Wendepunktslinien und Wendepunktsdreiseite, wie wir sie in § 28, 4. zusammengestellt haben, lassen sich nun auch die harmonischen Polaren der neun Wendepunkte herstellen

vermittelst der Eigenschaften des vollständigen Vierecks. Da nämlich durch $\mathfrak{W}_1^1$ die beiden Strahlen

$$s_1 = |\,\mathfrak{W}_1^1\,\mathfrak{W}_1^2\,\mathfrak{W}_1^3\,|, \quad t_1 = (\mathfrak{W}_1^1\,\mathfrak{W}_2^1\,\mathfrak{W}_3^1)$$

gehen, so müssen in dem vollständigen Viereck

$$\mathfrak{W}_1^2\,\mathfrak{W}_1^3\,\mathfrak{W}_2^1\,\mathfrak{W}_3^1$$

die beiden Diagonalpunkte

$$(\mathfrak{W}_1^2\,\mathfrak{W}_2^1,\ \mathfrak{W}_1^3\,\mathfrak{W}_3^1) = (v_3,\ v_2),$$
$$(\mathfrak{W}_1^2\,\mathfrak{W}_3^1,\ \mathfrak{W}_1^3\,\mathfrak{W}_2^1) = (u_2,\ u_3)$$

verbunden die harmonische Polare des Wendepunkts $\mathfrak{W}_1^1$ geben, weil sie zwei Punkte von dem Orte aller vierten harmonischen Punkte auf den durch $\mathfrak{W}_1^1$ gezogenen Strahlen sind. Diese Punkte $(u_2 u_3)$, $(v_2 v_3)$ sind aber gleichzeitig zwei Ecken von Wendepunktsdreiseiten, deren wir die vier haben

$$s_1 s_2 s_3, \quad t_1 t_2 t_3, \quad u_1 u_2 u_3, \quad v_1 v_2 v_3.$$

Bezeichnen wir daher die zwölf Ecken dieser vier Wendepunktsdreiseite

$$\begin{aligned}
(s_2 s_3) &= \mathfrak{S}_1, & (t_2 t_3) &= \mathfrak{T}_1, & (u_2 u_3) &= \mathfrak{U}_1, & (v_2 v_3) &= \mathfrak{V}_1,\\
(s_3 s_1) &= \mathfrak{S}_2, & (t_3 t_1) &= \mathfrak{T}_2, & (u_3 u_1) &= \mathfrak{U}_2, & (v_3 v_1) &= \mathfrak{V}_2,\\
(s_1 s_2) &= \mathfrak{S}_3, & (t_1 t_2) &= \mathfrak{T}_3, & (u_1 u_2) &= \mathfrak{U}_3, & (v_1 v_2) &= \mathfrak{V}_3,
\end{aligned}$$

so werden sich aus diesen zwölf Punkten zu je vieren die harmonischen Polaren

$$w_i^k$$

der Wendepunkte $\mathfrak{W}_i^k$ zusammensetzen lassen, wie folgt

$$\left\{\begin{aligned}
w_1^1 &= |\,\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_1\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1\,|, & w_1^2 &= |\,\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{U}_2\mathfrak{V}_3\,|, & w_1^3 &= |\,\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_3\mathfrak{U}_3\mathfrak{V}_2\,|,\\
w_2^1 &= |\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{T}_1\mathfrak{U}_3\mathfrak{V}_3\,|, & w_2^2 &= |\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{T}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_2\,|, & w_2^3 &= |\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{T}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{V}_1\,|,\\
w_3^1 &= |\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{T}_1\mathfrak{U}_2\mathfrak{V}_2\,|, & w_3^2 &= |\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{T}_2\mathfrak{U}_3\mathfrak{V}_1\,|, & w_3^3 &= |\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{T}_3\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_3\,|.
\end{aligned}\right.$$

Hieraus gehen aber wieder die zwölf Punkte $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{V}_i$ in der Weise hervor

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1 &= (w_1^1\,w_1^2\,w_1^3),\\
\mathfrak{S}_2 &= (w_2^1\,w_2^2\,w_2^3),\\
\mathfrak{S}_3 &= (w_3^1\,w_3^2\,w_3^3),
\end{aligned}\right. \qquad
\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{T}_1 &= (w_1^1\,w_2^1\,w_3^1),\\
\mathfrak{T}_2 &= (w_1^2\,w_2^2\,w_3^2),\\
\mathfrak{T}_3 &= (w_1^3\,w_2^3\,w_3^3),
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \mathfrak{U}_1 = (w_1^1\, w_2^2\, w_3^3), \\ \mathfrak{U}_2 = (w_1^2\, w_2^3\, w_3^1), \\ \mathfrak{U}_3 = (w_1^3\, w_2^1\, w_3^2), \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{B}_1 = (w_1^1\, w_2^3\, w_3^2), \\ \mathfrak{B}_2 = (w_1^3\, w_2^2\, w_3^1), \\ \mathfrak{B}_3 = (w_1^2\, w_2^1\, w_3^3). \end{cases}$$

Dies läßt sich in Worten folgendermaßen aussprechen:

Die neun harmonischen Polaren der Wendepunkte einer $C^{(3)}$ gehen zu je dreien durch die zwölf Ecken der vier Wendepunktsdreiseite, sodaß jede harmonische Polare vier von den Ecken der Wendepunktsdreiseite enthält. Die harmonischen Polaren solcher drei Wendepunkte, welche auf einer Geraden (Wendepunktslinie) liegen, schneiden sich allemal in einem Punkte, nämlich in der Gegenecke desjenigen Wendepunktsdreiseits, von welchem jene Gerade eine Seite ist. Die neun harmonischen Polaren bilden eine ganz analoge Konfiguration, wie die Wendepunkte selbst, indem nur die eine der andern dual gegenübersteht. Der Zusammenhang beider Konfigurationen ist derartig, daß die Wendepunktsdreiseite der ursprünglichen Konfiguration identisch zusammenfallen mit den analogen Dreiecken der dual gegenüberstehenden, indem die Ecken dieser vier Dreiecke die Gegenecken jener vier Dreiseite sind.

Hieraus folgt denn auch, daß die neun harmonischen Polaren hinsichtlich ihrer Realität und gegenseitigen Lage sich genau ebenso verhalten, wie die Wendepunkte selbst, also z. B.:

Die drei harmonischen Polaren, welche durch eine Ecke eines Wendepunktsdreiseits gehen, bilden mit den beiden Seiten des Dreiseits in dieser Ecke ein äquianharmonisches System von fünf Strahlen, indem die drei ersteren die cyklisch-projektiven Elemente und die beiden letzteren die Doppelelemente des Systems sind.

5. Betrachten wir ein Wendepunktsdreiseit und eine der übrigen Wendepunktslinien, z. B.

$$s_1,\ s_2,\ s_3 \text{ und } t_1,$$

so bilden dieselben ein vollständiges Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken sind

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{S}_1 & \text{und} & \mathfrak{W}_1^1, \\ \mathfrak{S}_2 & \text{„} & \mathfrak{W}_2^1, \\ \mathfrak{S}_3 & \text{„} & \mathfrak{W}_3^1; \end{array}$$

die Strahlenpaare, welche von $\mathfrak{T}_1$ nach diesen drei Paar Gegenecken gehen, bilden bekanntlich eine Strahleninvolution, deren Strahlenpaare sind

$$\begin{array}{lcl} w_1^1 & \text{und} & |\mathfrak{T}_1\mathfrak{W}_1^1|, \\ w_2^1 & \text{„} & |\mathfrak{T}_1\mathfrak{W}_2^1|, \\ w_3^1 & \text{„} & |\mathfrak{T}_1\mathfrak{W}_3^1|; \end{array}$$

die Gerade $t_1 = |\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_3^1|$ wird also von den drei harmonischen Polaren w_1^1, w_2^1, w_3^1 in solchen drei Punkten getroffen, welche konjugiert sind den Punkten $\mathfrak{W}_1^1$, $\mathfrak{W}_2^1$, $\mathfrak{W}_3^1$ und mit diesen drei Punktepaare eine Punktinvolution bilden, also:

Eine Wendepunktslinie, welche drei Wendepunkte enthält, wird von den drei harmonischen Polaren derselben in drei neuen Punkten getroffen; die drei Punktepaare gehören einer Involution an.

Diejenigen neun Punkte, in welchen die Tangenten der Wendepunkte (Wendetangenten) von den ihnen zugehörigen harmonischen Polaren getroffen werden, liegen bekanntlich auf der Hesseschen Kurve $H^{(3)}$, weil sie die Doppelpunkte solcher Linienpaare sind, in welche die konischen Polaren der Wendepunkte ausarten; und es sind immer ein Wendepunkt $\mathfrak{W}$ und der Schnittpunkt $(t_{\mathfrak{W}}, w)$ ein Paar konjugierte Punkte für die $H^{(3)}$.

Wir haben aber gesehen, daß die Wendepunkte der $C^{(3)}$ gleichzeitig Wendepunkte der $H^{(3)}$ sind und daß ein Wendepunkt der $H^{(3)}$ ein solcher Punkt ist, welcher gleichzeitig Tangentialpunkt für seinen konjugierten Punkt ist. Hieraus folgt, daß der Wendepunkt $\mathfrak{W}$ Tangentialpunkt sein muß zu dem Schnittpunkte $(t_{\mathfrak{W}}, w)$ für die $H^{(3)}$, also muß die

Tangente $t_{\mathfrak{W}}$ die Hessesche Kurve $H^{(3)}$ in diesem Schnittpunkte $(t_{\mathfrak{W}}, w)$ berühren. Daher erhalten wir den Satz:

Die Wendetangenten der $C^{(3)}$ berühren ihre $H^{(3)}$ in denjenigen Punkten, in welchen jede Wendetangente von der harmonischen Polare ihres Wendepunkts getroffen wird.

Die Hessesche Kurve $H^{(3)}$ und die Cayleysche Kurve $K^{(3)}$ stehen in derselben Beziehung zueinander, wie die früher von uns betrachtete ursprüngliche Kurve $C^{(3)}$ und die zu ihr gehörige $\mathfrak{K}^{(3)}$ (§ 7, 5.).

Die Kurven $H^{(3)}$ und $K^{(3)}$ berühren sich also in den neun Punkten, in welchen sie sich begegnen, nämlich in den konjugierten Punkten zu den Wendepunkten der $H^{(3)}$, welche zugleich die Wendepunkte der $C^{(3)}$ sind.

Die zu den gemeinschaftlichen Tangenten der $H^{(3)}$ und $K^{(3)}$ in ihren neun Berührungspunkten konjugierten Tangenten sind, wie wir wissen, die Rückkehrtangenten der $K^{(3)}$. Da nun die Wendetangenten der $C^{(3)}$ in denjenigen Punkten berühren, in denen sich $H^{(3)}$ und $K^{(3)}$ begegnen, und die konjugierten Tangenten zu den Wendepunkten der $C^{(3)}$ für die $K^{(3)}$ die harmonischen Polaren w der Wendepunkte $\mathfrak{W}$ sind, so schließen wir:

Die harmonischen Polaren w der Wendepunkte $\mathfrak{W}$ einer $C^{(3)}$ sind die Rückkehrtangenten der Cayleyschen Kurve $K^{(3)}$, und die Berührungspunkte (Rückkehrpunkte der $K^{(3)}$) derselben sind diejenigen neun Punkte, in welchen die Wendetangenten $t_{\mathfrak{W}}$ der $C^{(3)}$ von den harmonischen Polaren ihrer Wendepunkte getroffen werden.

Hieraus folgt auch eine Bestätigung der schon vorhin (4.) gemachten Bemerkung, daß die neun harmonischen Polaren eine analoge, nur dual gegenüberstehende Konfiguration bilden, wie die neun Wendepunkte selbst, weil die beiden Kurven $H^{(3)}$ und $K^{(3)}$ einander dual gegenüberstehen und den Wendepunkten der $H^{(3)}$ die Rückkehrtangenten der $K^{(3)}$ gegenüberstehen.

6. Nehmen wir einen beliebigen Wendepunkt der $C^{(3)}$

$$\mathfrak{W}_i^k,$$

und möge seine harmonische Polare die Wendetangente für $\mathfrak{W}_i^k$ in dem Punkte

$$\mathfrak{P}_i^k$$

schneiden, dann sind $\mathfrak{W}_i^k$ und $\mathfrak{P}_i^k$ nicht allein ein Paar konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve $H^{(3)}$, sondern es ist auch $\mathfrak{W}_i^k$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{P}_i^k$. Da man nun durch zwei solcher Paare konjugierter Punkte allemal ein drittes Paar konjugierter Punkte ableitet, so gelangt man zu einem innigen Zusammenhange zwischen den Punkten $\mathfrak{W}_i^k$ und $\mathfrak{P}_i^k$ $(i, k = 1, 2, 3)$, z. B. aus $\mathfrak{W}_1^1$ und $\mathfrak{W}_1^2$, deren konjugierte $\mathfrak{P}_1^1$ und $\mathfrak{P}_1^2$ sind, folgt

$$(\mathfrak{W}_1^1 \mathfrak{W}_1^2, \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_1^2) = \mathfrak{W}_1^3,$$
$$(\mathfrak{W}_1^1 \mathfrak{P}_1^2, \mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{P}_1^1) = \mathfrak{P}_1^3,$$

woraus hervorgeht, daß je drei Punkte

$$|\mathfrak{W}_1^1 \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_1^3|, \quad |\mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{P}_1^3 \mathfrak{P}_1^1|, \quad |\mathfrak{W}_1^3 \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_1^2|$$

auf einer Geraden liegen müssen.

Wir erhalten hierdurch im ganzen 36 Gerade, deren jede zwei Punkte $\mathfrak{P}$ und einen Wendepunkt $\mathfrak{W}$ enthält, was aus folgendem Schema hervorgeht:

$$|\mathfrak{W}_1^1 \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_1^3|, \quad |\mathfrak{W}_2^1 \mathfrak{P}_2^2 \mathfrak{P}_2^3|, \quad |\mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{P}_3^2 \mathfrak{P}_3^3|,$$
$$|\mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{P}_1^3 \mathfrak{P}_1^1|, \quad |\mathfrak{W}_2^2 \mathfrak{P}_2^3 \mathfrak{P}_2^1|, \quad |\mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{P}_3^3 \mathfrak{P}_3^1|,$$
$$|\mathfrak{W}_1^3 \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_1^2|, \quad |\mathfrak{W}_2^3 \mathfrak{P}_2^1 \mathfrak{P}_2^2|, \quad |\mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{P}_3^1 \mathfrak{P}_3^2|;$$

$$|\mathfrak{W}_1^1 \mathfrak{P}_2^1 \mathfrak{P}_3^1|, \quad |\mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{P}_2^2 \mathfrak{P}_3^2|, \quad |\mathfrak{W}_1^3 \mathfrak{P}_2^3 \mathfrak{P}_3^3|,$$
$$|\mathfrak{W}_2^1 \mathfrak{P}_3^1 \mathfrak{P}_1^1|, \quad |\mathfrak{W}_2^2 \mathfrak{P}_3^2 \mathfrak{P}_1^2|, \quad |\mathfrak{W}_2^3 \mathfrak{P}_3^3 \mathfrak{P}_1^3|,$$
$$|\mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_2^1|, \quad |\mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_2^2|, \quad |\mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{P}_1^3 \mathfrak{P}_2^3|;$$

$$|\mathfrak{W}_1^1 \mathfrak{P}_2^2 \mathfrak{P}_3^3|, \quad |\mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{P}_2^3 \mathfrak{P}_3^1|, \quad |\mathfrak{W}_1^3 \mathfrak{P}_2^1 \mathfrak{P}_3^2|,$$
$$|\mathfrak{W}_2^2 \mathfrak{P}_3^3 \mathfrak{P}_1^1|, \quad |\mathfrak{W}_2^3 \mathfrak{P}_3^1 \mathfrak{P}_1^2|, \quad |\mathfrak{W}_2^1 \mathfrak{P}_3^2 \mathfrak{P}_1^3|,$$
$$|\mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_2^2|, \quad |\mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_2^3|, \quad |\mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{P}_1^3 \mathfrak{P}_2^1|;$$

$$|\mathfrak{W}_1^1 \mathfrak{P}_2^3 \mathfrak{P}_3^2|, \quad |\mathfrak{W}_1^3 \mathfrak{P}_2^2 \mathfrak{P}_3^1|, \quad |\mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{P}_2^1 \mathfrak{P}_3^3|,$$
$$|\mathfrak{W}_2^3 \mathfrak{P}_3^2 \mathfrak{P}_1^1|, \quad |\mathfrak{W}_2^2 \mathfrak{P}_3^1 \mathfrak{P}_1^3|, \quad |\mathfrak{W}_2^1 \mathfrak{P}_3^3 \mathfrak{P}_1^2|,$$
$$|\mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_2^3|, \quad |\mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{P}_1^3 \mathfrak{P}_2^2|, \quad |\mathfrak{W}_3^3 \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_2^1|;$$

von diesen 36 Geraden gehen durch jeden der neun Wendepunkte vier, dagegen durch jeden der neun Punkte $\mathfrak{P}_i^k$ acht Gerade, nämlich seine Verbindungslinien mit den acht übrigen $\mathfrak{P}_i^k$; die 36 Geraden sind daher die $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ Verbindungslinien je zweier der neun Punkte $\mathfrak{P}_i^k$, und wir können sagen:

Jede Verbindungslinie zweier Punkte $\mathfrak{P}_i^k$ auf der $H^{(3)}$ trifft dieselbe zum dritten Mal in einem Wendepunkte derselben, welcher zugleich ein Wendepunkt der Fundamentalkurve $C^{(3)}$ ist. Diese 36 Verbindungslinien schneiden sich zu je vier in den neun Wendepunkten der $C^{(3)}$.

Wir können demgemäß das vorige Tableau auch kürzer so darstellen:

	$\mathfrak{P}_1^1$	$\mathfrak{P}_1^2$	$\mathfrak{P}_1^3$	$\mathfrak{P}_2^1$	$\mathfrak{P}_2^2$	$\mathfrak{P}_2^3$	$\mathfrak{P}_3^1$	$\mathfrak{P}_3^2$	$\mathfrak{P}_3^3$
$\mathfrak{P}_1^1$	*	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{W}_1^2$	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{W}_3^3$	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{W}_2^2$
$\mathfrak{P}_2^1$	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{W}_3^3$	$\mathfrak{W}_3^2$	*	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{W}_1^2$
$\mathfrak{P}_3^1$	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{W}_1^2$	*	$\mathfrak{W}_3^3$	$\mathfrak{W}_3^2$
$\mathfrak{P}_1^2$	$\mathfrak{W}_1^3$	*	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{W}_3^3$	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{W}_2^1$
$\mathfrak{P}_2^2$	$\mathfrak{W}_3^3$	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{W}_2^3$	*	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{W}_1^2$	$\mathfrak{W}_1^1$
$\mathfrak{P}_3^2$	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{W}_1^2$	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{W}_3^3$	*	$\mathfrak{W}_3^1$
$\mathfrak{P}_1^3$	$\mathfrak{W}_1^2$	$\mathfrak{W}_1^1$	*	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{W}_3^3$	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{W}_2^3$
$\mathfrak{P}_2^3$	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{W}_3^3$	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{W}_2^1$	*	$\mathfrak{W}_1^2$	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{W}_1^3$
$\mathfrak{P}_3^3$	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{W}_1^2$	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{W}_3^1$	*

wo die Verbindungslinie zweier $\mathfrak{P}_i^k$ aus einer beliebigen Horizontal- und Vertikalreihe genommen den betreffenden Wendepunkt $\mathfrak{W}_i^k$ aufweist, der auf dieser Geraden liegt.

7. Ferner wissen wir, daß wenn drei Punkte einer Kurve dritten Grades $H^{(3)}$ auf einer Geraden liegen, ihre drei konjugierten Punkte derartig beschaffen sind, daß in ihnen ein Kegelschnitt die $H^{(3)}$ dreimal berühren kann, oder anders ausgedrückt, daß sie ein Tripel von Punkten der $H^{(3)}$ bilden; aus der Lage der Wendepunkte $\mathfrak{W}_i^k$ schließen wir also auf

die Lage der Punkte $\mathfrak{P}_i^k$ $(i, k = 1, 2, 3)$, welche sich so zu zwölf Tripeln ordnen

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_1^3, & \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_2^1 \mathfrak{P}_3^1, \\
\mathfrak{P}_2^1 \mathfrak{P}_2^2 \mathfrak{P}_2^3, & \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_2^2 \mathfrak{P}_3^2, \\
\mathfrak{P}_3^1 \mathfrak{P}_3^2 \mathfrak{P}_3^3, & \mathfrak{P}_1^3 \mathfrak{P}_2^3 \mathfrak{P}_3^3;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_2^2 \mathfrak{P}_3^3, & \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_2^3 \mathfrak{P}_3^2, \\
\mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_2^3 \mathfrak{P}_3^1, & \mathfrak{P}_1^3 \mathfrak{P}_2^2 \mathfrak{P}_3^1, \\
\mathfrak{P}_1^3 \mathfrak{P}_2^1 \mathfrak{P}_3^2, & \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_2^1 \mathfrak{P}_3^3.
\end{array}$$

Da die sechs Punkte zweier beliebigen Tripel allemal auf einem Kegelschnitt liegen, so liegen die neun Punkte $\mathfrak{P}_i^k$ 66mal $\left(= \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2}\right)$ zu je sechs auf einem Kegelschnitt.

Es bilden auch noch auf andere Weise, nämlich immer zwei Wendepunkte und der zu dem dritten auf ihrer Verbindungslinie liegenden Wendepunkt konjugierte Punkt ein Tripel, z. B.

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{W}_1^1 \mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{P}_1^3, \\
\mathfrak{W}_2^1 \mathfrak{W}_2^2 \mathfrak{P}_2^3, \\
\mathfrak{W}_3^1 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{P}_3^3
\end{array}$$

u. s. f.

Wir erhalten also auf diese Weise $12 \cdot 3 = 36$ neue Tripel, und wenn wir diese untereinander oder mit den vorigen zu je zweien verbinden, so erhalten wir Kegelschnitte, welche entweder vier Wendepunkte und zwei Punkte $\mathfrak{P}_i^k$ oder zwei Wendepunkte und gewisse vier Punkte $\mathfrak{P}_i^k$ enthalten, woraus eine große Menge neuer Kegelschnitte hervorgeht.

§ 30. Über den Zusammenhang der Punkte einer $C^{(3)}$ mit ihren zugehörigen Tangentialpunkten.

1. Wir haben uns über die Lage und Realität der Wendepunkte einer $C^{(3)}$ (§§ 28 und 29) orientiert unter der Voraussetzung, daß die Kurve mindestens einen reellen Wendepunkt habe. Der Nachweis hierfür soll jetzt nachträglich geliefert werden durch die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den Punkten der $C^{(3)}$ und ihren zugehörigen Tangentialpunkten.

Aus den allgemeinen Betrachtungen in § 16 geht hervor, daß zunächst bei der einzügigen $C^{(3)}$, wenn wir in einem Punkte $\mathfrak{O}$ derselben die Tangente $t_{\mathfrak{O}}$ ziehen, welche zum dritten Mal in $\mathfrak{O}'$, dem zu $\mathfrak{O}$ gehörigen Tangentialpunkte, der $C^{(3)}$ begegnet, bei der Veränderung von $\mathfrak{O}$ längs des ganzen kontinuierlich zusammenhängenden Zuges, auch der Punkt $\mathfrak{O}'$ längs desselben sich fortbewegen wird.

Der Punkt $\mathfrak{O}'$ durchläuft aber den Zug zweimal, während $\mathfrak{O}$ ihn einmal durchläuft, weil aus jedem Punkte des Zuges zwei und nur zwei reelle Tangenten an denselben gehen. Halten wir nämlich einen Punkt $\mathfrak{O}_0'$ der $C^{(3)}$ fest und legen aus ihm die beiden reellen Tangenten an dieselbe, welche in $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ berühren, so teilen die beiden Punkte $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ den ganzen kontinuierlich zusammenhängenden Zug in zwei Gebiete; während der Punkt $\mathfrak{O}$ das eine derselben durchläuft von $\mathfrak{O}_1$ bis $\mathfrak{O}_2$, wird der zugehörige Tangentialpunkt von $\mathfrak{O}_0'$ ausgehend wieder nach $\mathfrak{O}_0'$ zurückkehren, indem er den ganzen Zug durchläuft, und wenn $\mathfrak{O}$ das andere Gebiet von $\mathfrak{O}_2$ nach $\mathfrak{O}_1$ durchläuft, wird der zugehörige Tangentialpunkt $\mathfrak{O}'$ nochmals von $\mathfrak{O}_0'$ ausgehend den ganzen Zug durchlaufen und wieder nach $\mathfrak{O}_0'$ zurückkehren.

Um diese Behauptung zu rechtfertigen, wollen wir das eine Gebiet des Zuges zwischen $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ das Gebiet (A) und das übrige von $\mathfrak{O}_2$ bis $\mathfrak{O}_1$ das Gebiet (B) nennen.

Wenn nun ein veränderlicher Punkt $\mathfrak{X}$ auf dem Zuge das eine Gebiet (A) von $\mathfrak{O}_1$ nach $\mathfrak{O}_2$ kontinuierlich durchläuft, so muß der zugehörige Tangentialpunkt $\mathfrak{X}'$ von $\mathfrak{O}_0'$ ausgehend wieder nach $\mathfrak{O}_0'$ zurückkehren, also entweder den ganzen Zug kontinuierlich durchlaufen oder nur einen Teil desselben und dann wieder umkehren, um nach $\mathfrak{O}_0'$ zurückgelangen zu können; wenn aber $\mathfrak{X}'$ etwa nur bis $\mathfrak{X}_0'$ gelangte und dann wieder umkehrte, so würde er die von ihm durchlaufenen Punkte des Zuges zweimal erreichen, die übrigen gar nicht, d. h. aus jenen Punkten des Zuges gingen zwei reelle Tangenten an denselben, aus diesen keine; lassen wir dann den veränderlichen Punkt $\mathfrak{X}$ das übrige Gebiet (B)

durchlaufen, so können wiederum zwei Fälle eintreten, der zugehörige Tangentialpunkt $\mathfrak{X}'$ durchläuft entweder von $\mathfrak{O}_0'$ ausgehend den ganzen Zug, was nicht möglich wäre, weil er dann auch das frühere Stück nochmals durchlaufen müßte, welches alle Punkte enthielte, aus denen drei Tangenten an die $C^{(3)}$ gingen, oder zweitens der Punkt $\mathfrak{X}'$ läuft von $\mathfrak{O}_0'$ ausgehend nur ein Stück auf dem noch freien Teile des Zuges und käme umkehrend wieder nach $\mathfrak{O}_0'$ zurück. Dies ist aber auch nicht möglich; denn sonst blieben offenbar auf dem Zuge Punkte übrig, die keinmal von $\mathfrak{X}'$ erreicht würden, aus denen also keine reelle Tangente an den Zug ginge. Hieraus folgt, daß die frühere Annahme unzutreffend ist; vielmehr wird in der That, während $\mathfrak{X}$ das Gebiet (A) kontinuierlich durchläuft, der zugehörige Tangentialpunkt $\mathfrak{X}'$ den ganzen Zug kontinuierlich durchlaufen, ohne seine Bewegungsrichtung umzukehren, von $\mathfrak{O}_0'$ ausgehend und nach $\mathfrak{O}_0'$ wieder zurückkehrend; und während $\mathfrak{X}$ das übrige Gebiet (B) durchläuft, wird sein Tangentialpunkt $\mathfrak{X}'$ dieselbe Bewegung zum zweiten Mal ausführen.

2. Nun liegt der den beiden Punkten $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ gemeinschaftliche Tangentialpunkt $\mathfrak{O}_0'$ entweder in dem Gebiete (A) oder in dem Gebiete (B) des Zuges. Liegt der Punkt $\mathfrak{O}_0'$ in dem Gebiete (B), so muß, wenn $\mathfrak{X}$ das Gebiet (A) durchläuft, der Tangentialpunkt $\mathfrak{X}'$ um von $\mathfrak{O}_0'$ ausgehend und ohne seine Bewegungsrichtung ändern zu können, nach $\mathfrak{O}_0'$ zurückkehrend notwendig das ganze Gebiet (A) durchstreifen, mithin auch mindestens einmal mit $\mathfrak{X}$ zusammentreffen auf diesem Gebiete. Wenn ein Punkt der $C^{(3)}$ mit seinem zugehörigen Tangentialpunkt zusammentrifft, so wird er offenbar ein Wendepunkt der Kurve.

Liegt also $\mathfrak{O}_0'$ auf dem Gebiete (B), so enthält das Gebiet (A) mindestens einen reellen Wendepunkt, und liegt umgekehrt $\mathfrak{O}_0'$ auf dem Gebiete (A), so enthält notwendig das Gebiet (B) mindestens einen reellen Wendepunkt der Kurve.

Unter allen Umständen enthält also der ganze Zug der einzügigen $C^{(3)}$ mindestens e i n e n r e e l l e n W e n d e p u n k t;

daraus folgt aber, wie wir in § 28 gesehen, die Realität dreier und alles Übrige. Ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ hat die charakteristische Eigenschaft, drei unendlich nahe aufeinander folgende Punkte 1, 2, 3 der Kurve und die Wendetangente in demselben, zwei aufeinander folgende unendlich nahe Tangenten $|12|$ und $|23|$ zu vereinigen. Für die Tangente $|12|$ ist 3 der zugehörige Tangentialpunkt, für die Tangente $|23|$ wird 1 der zugehörige Tangentialpunkt. Indem beim Durchgange durch den Wendepunkt Berührungspunkt und Tangentialpunkt zusammenfallen, wird also, wenn der Berührungspunkt die Bewegungsrichtung von 1 durch 2 nach 3 einschlägt, der zugehörige Tangentialpunkt die Bewegungsrichtung von 3 durch 2 nach 1, d. h. die entgegengesetzte Bewegungsrichtung einschlagen müssen. Da nun, wie wir gesehen haben, bei der Bewegung eines Punktes längs des ganzen kontinuierlichen (im Unendlichen zusammenhängenden) Zuges in einer bestimmten Bewegungsrichtung mit seiner Tangente, auch der zugehörige Tangentialpunkt eine bestimmte Bewegungsrichtung einschlägt und dieselbe nicht umkehren kann, so wird überhaupt, wie dies beim Durchgange durch den Wendepunkt der Fall ist, bei kontinuierlicher Bewegung der Tangente längs des Zuges, der Tangentialpunkt die entgegengesetzte Bewegungsrichtung haben, wie der Berührungspunkt.

Da nun die Punkte $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$, welche denselben Tangentialpunkt $\mathfrak{O}_0'$ haben, den ganzen Zug in die beiden Gebiete (A) und (B) zerlegen, so wird, falls der Punkt $\mathfrak{O}_0'$ auf dem Gebiete (B) liegt, wenn der Punkt $\mathfrak{X}$ das Gebiet (A) von $\mathfrak{O}_1$ nach $\mathfrak{O}_2$ durchläuft, der Tangentialpunkt $\mathfrak{X}'$ in entgegengesetzter Bewegungsrichtung das Gebiet von $\mathfrak{O}_2$ nach $\mathfrak{O}_1$ durchlaufen, also nur einmal mit dem Punkte $\mathfrak{X}$ zusammentreffen können; das Gebiet (B) dagegen wird durch den Punkt $\mathfrak{O}_0'$ in zwei Teile zerlegt, zwischen $\mathfrak{O}_0'$ und $\mathfrak{O}_1$ und zwischen $\mathfrak{O}_0'$ und $\mathfrak{O}_2$; in jedem der beiden Teile muß der Punkt $\mathfrak{X}$ seinem in entgegengesetzter Richtung laufenden Tangentialpunkte $\mathfrak{X}'$ einmal begegnen. Es liegen also auf dem Gebiete (B) zwei Wendepunkte, auf dem Gebiete (A)

ein Wendepunkt, und dies sind die drei einzig reellen Wendepunkte (welche in gerader Linie liegen). In dem andern Falle, wenn $\mathfrak{O}_0'$ auf dem Gebiete (A) liegt, ist es gerade umgekehrt.

Die Punkte $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ sind konjugierte Punkte der einzügigen $C^{(3)}$, weil sie denselben Tangentialpunkt haben, und zwar des einzigen Systems, welches auf ihr reell existiert. Wir schließen also:

Zwei konjugierte Punkte der einzügigen $C^{(3)}$ zerlegen den ganzen kontinuierlichen (im Unendlichen zusammenhängenden) Zug derselben in zwei Gebiete, deren eines den gemeinsamen Tangentialpunkt enthält. Auf dem Gebiete, das diesen nicht enthält, liegt allemal nur ein reeller Wendepunkt der $C^{(3)}$; das andere Gebiet wird durch den Tangentialpunkt in zwei Teile zerlegt, deren jeder einen reellen Wendepunkt enthält. Dies sind die drei einzig reellen Wendepunkte der einzügigen $C^{(3)}$.

Wir bemerken noch, daß bei der einzügigen $C^{(3)}$ während der Bewegung einer Tangente längs des kontinuierlichen Zuges Berührungspunkt und Tangentialpunkt immer entgegengesetzte Bewegungsrichtung haben, wie wir gesehen haben; dagegen haben zwei konjugierte Punkte immer dieselbe Bewegungsrichtung auf dem Zuge. Denn mit einem Punkte, der sich kontinuierlich auf dem Zuge in einer bestimmten Bewegungsrichtung fortbewegt, wird sich auch der konjugierte Punkt in bestimmter Bewegungsrichtung kontinuierlich fortbewegen, ohne dieselbe umkehren zu können.

Wenn diese beiden Bewegungsrichtungen entgegengesetzt wären, so müßten sich daher notwendig die beiden konjugierten Punkte einmal begegnen, also zusammenfallen, was bei einer $C^{(3)}$ ohne Doppelpunkt, wie wir sie voraussetzen, nicht möglich ist. Teilt also einmal ein Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ den Zug in die Gebiete (A) und (B), so hat jeder Punkt auf dem Gebiete (A) seinen konjugierten Punkt auf dem Gebiete (B) und umgekehrt.

3. Bei der zweizügigen $C^{(3)}$, welche aus einem paaren Zuge (Oval) und einem unpaaren Zuge (Serpentine) besteht, wird jede Tangente des paaren Zuges ihren Tangentialpunkt auf dem unpaaren Zuge haben; es kann also niemals ein Berührungspunkt auf einer Tangente des paaren Zuges mit seinem Tangentialpunkt zusammenfallen, und daher auch niemals ein Wendepunkt auf dem paaren Zuge liegen. Dagegen hat jeder Punkt des unpaaren Zuges seinen Tangentialpunkt wieder auf dem unpaaren Zuge; die reellen Wendepunkte der zweizügigen $C^{(3)}$ können also nur auf dem unpaaren Zuge liegen. Da nun durch jeden Punkt des unpaaren Zuges zwei reelle Tangenten an den paaren Zug gehen, welche hier nicht in Betracht kommen, und zwei reelle Tangenten an den unpaaren Zug gehen (§ 16), wie bei der einzügigen $C^{(3)}$, so findet hier für den unpaaren Zug der zweizügigen $C^{(3)}$ genau dasselbe Verhältnis statt wie vorhin bei der einzügigen, nur mit dem Unterschiede, daß die Berührungspunkte des aus einem Punkte des unpaaren Zuges an denselben gehenden Tangentenpaares nur in einem der drei Systeme konjugierter Punkte auf der zweizügigen $C^{(3)}$ enthalten sind. Das Ergebnis der Untersuchung rücksichtlich der Ermittelung der drei reellen Wendepunkte bleibt aber bestehen, nämlich:

Eine zweizügige $C^{(3)}$ hat ihre drei reellen Wendepunkte nur auf dem unpaaren Zuge; aus einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ desselben gehen zwei reelle Tangenten an ihn, welche in $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ berühren und den Zug in zwei Gebiete zerlegen, deren eines den Punkt $\mathfrak{O}$ enthält; dasjenige, welches ihn nicht enthält, hat einen reellen Wendepunkt, das andere zwei reelle Wendepunkte, deren einer auf dem Teile zwischen $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$, der andere auf dem Teile zwischen $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_2$ liegt.*

* Vergl. H. Durège: „Über die Formen der Kurven dritter Ordnung“, Borchardts Journal f. Math. Bd. 75, S. 153.

§ 31. Das Steinersche Schliefsungsproblem für die $C^{(3)}$.

1. In einer am 27. November 1845 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung stellte Steiner* einige Sätze über die Kurve dritter Ordnung auf, welche wenig Beachtung fanden, bis sie durch Clebsch** eine ebenso elegante, wie durch die angewendeten Prinzipien bedeutungsvolle analytische Lösung erhielten. Eine rein geometrische Behandlung und Erweiterung wurde ihnen erst zu Teil durch Küpper*** und Schoute†, endlich eine Übertragung auf die räumliche $C^{(4)}$ durch Eberhard.†† Der wohl zuerst durch Küpper aufgedeckte einfache geometrische Ursprung dieser Sätze schließt sich so naturgemäß an die hier entwickelten Fundamentaleigenschaften der $C^{(3)}$ an, daß wir auf ihre Darstellung nicht verzichten dürfen.

Gehen wir von zwei festen Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ der $C^{(3)}$ aus und beginnen ein Polygon, $2n$-Eck, der $C^{(3)}$ einzubeschreiben, dessen Seiten abwechselnd durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gehen, so konstruieren wir folgendermaßen:

Von einem beliebigen Anfangspunkte $\mathfrak{A}_1$ der $C^{(3)}$ ziehen wir $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}|$, welche Gerade die Kurve zum dritten Mal in $\mathfrak{B}_1$ trifft, dann ziehen wir die Gerade $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{Q}|$, welche in $\mathfrak{A}_2$ die $C^{(3)}$ trifft, weiter $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}|$, die in $\mathfrak{B}_2$ trifft, $|\mathfrak{B}_2\mathfrak{Q}|$, die

---

* J. Steiner: „Geometrische Lehrsätze", Crelles Journal f. Math. Bd. XXXII, S. 182.

** A. Clebsch: „Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Kurven dritter Ordnung", Borchardts Journal f. Math. Bd. LXIII, S. 94.

*** K. Küpper: „Über die Steinerschen Polygone auf einer Kurve dritter Ordnung und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage", Klein u. Mayer, Math. Ann. Bd. XXIV, S. 1.

† P. H. Schoute: „Die Steinerschen Polygone", Kroneckers Journal f. Math. Bd. XCV, S. 105.

†† V. Eberhard: „Die Raumkurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steinerschen Schließungsproblemen bei den ebenen Kurven dritter Ordnung", Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XXXII, S. 65.

in $\mathfrak{A}_3$ trifft u. s. f., bis $|\mathfrak{A}_n\mathfrak{P}|$ in $\mathfrak{B}_n$ und $|\mathfrak{B}_n\mathfrak{Q}|$ in $\mathfrak{A}_{n+1}$ der $C^{(3)}$ begegnet. Dann wird im allgemeinen bei beliebiger Wahl der Fundamentalpunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und des willkürlichen Anfangspunktes der letzte Punkt $\mathfrak{A}_{n+1}$ mit dem ersten $\mathfrak{A}_1$ nicht zusammenfallen; der Steinersche Satz sagt aber aus, daß wenn dies einmal stattfindet, es immer stattfinden muß, wo man auch den Anfangspunkt $\mathfrak{A}_1$ auf der $C^{(3)}$ wählen mag bei festgehaltenen Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$. Das $2n$-Eck

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_3 \ldots \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n$$

schließt sich also immer, wenn es sich einmal schließt.

2. Der Beweis dieses schönen Satzes ist eine unmittelbare Folge des bekannten Satzes (S. 56):

„Schneidet eine Gerade die $C^{(3)}$ in den drei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{B}$ und eine zweite in $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{B}'$, so treffen die drei Verbindungslinien $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|$, $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{B}'|$ die $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten einer Geraden."

Konstruieren wir nämlich ebenso wie vorhin das $2n$-Eck

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n,$$

indem wir von $\mathfrak{A}_1$ ausgingen, ein zweites $2n$-Eck

$$\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_2' \ldots \mathfrak{A}_n'\mathfrak{B}_n',$$

indem wir von einem andern Punkte $\mathfrak{A}_1'$ ausgehen, und nehmen wir an, daß das erste $2n$-Eck sich schließt, also $\mathfrak{A}_{n+1} \equiv \mathfrak{A}_1$ wird, so zeigt sich, daß auch das zweite sich schließen muß und zwar mit gleicher Anzahl der Ecken.

Denn wir haben nach der angegebenen Konstruktion immer folgende je drei Punkte der $C^{(3)}$ auf einer Geraden

$\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_1'\mathfrak{P}\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_1'\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_2'$
$\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_2\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_2'\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{B}_2'\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_3'$
$\mathfrak{A}_3\mathfrak{P}\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_3\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{A}_3'\mathfrak{P}\mathfrak{B}_3'$, $\mathfrak{B}_3'\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_4'$
. . . .	. . . .
$\mathfrak{A}_n\mathfrak{P}\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{B}_n\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_{n+1}$	$\mathfrak{A}_n'\mathfrak{P}\mathfrak{B}_n'$, $\mathfrak{B}_n'\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_{n+1}'$.
$\mathfrak{A}_{n+1} \equiv \mathfrak{A}_1$	

Jetzt folgt aus den beiden Geraden

$$|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{P} \mathfrak{B}_1|,$$
$$|\mathfrak{A}_2' \mathfrak{Q} \mathfrak{B}_1'|$$

nach dem obigen Satze, daß die dritten Schnittpunkte der Geraden $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2'|$, $|\mathfrak{P} \mathfrak{Q}|$, $|\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1'|$ mit der $C^{(3)}$ auf einer neuen Geraden liegen müssen, und ebenso aus den beiden Geraden

$$|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{Q} \mathfrak{B}_1|,$$
$$|\mathfrak{A}_1' \mathfrak{P} \mathfrak{B}_1'|,$$

daß die dritten Schnittpunkte der Geraden $|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1'|$, $|\mathfrak{Q} \mathfrak{P}|$, $|\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1'|$ mit der $C^{(3)}$ auf einer neuen Geraden liegen müssen; diese ist aber mit der vorigen identisch, weil sie zwei Punkte mit ihr gemein hat; ihr dritter Schnittpunkt mit der $C^{(3)}$ muß also sowohl auf $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2'|$, als auch auf $|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1'|$ liegen, folglich muß der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2',\ \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1') = \mathfrak{O}_1$$

ein Punkt der $C^{(3)}$ sein.

In gleicher Weise folgern wir, daß der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3',\ \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_2') = \mathfrak{O}_2$$

ein Punkt der $C^{(3)}$ sein muß.

Aus den Geraden

$$|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{O}_1 \mathfrak{A}_2'|,\ |\mathfrak{A}_3 \mathfrak{O}_2 \mathfrak{A}_2'|,$$
$$|\mathfrak{A}_3' \mathfrak{O}_2 \mathfrak{A}_2|,\ |\mathfrak{A}_1' \mathfrak{O}_1 \mathfrak{A}_2|$$

folgern wir in gleicher Weise, daß auch der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_3',\ \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_1') = \mathfrak{O}_3$$

ein Punkt der $C^{(3)}$ sein muß. Ferner sehen wir, wie vorhin, daß

$$(\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4',\ \mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_3') = \mathfrak{O}_4$$

ein Punkt der $C^{(3)}$ sein muß und schließen aus den Geraden

$$|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{O}_3 \mathfrak{A}_3'|,\ |\mathfrak{A}_4 \mathfrak{O}_4 \mathfrak{A}_3'|,$$
$$|\mathfrak{A}_4' \mathfrak{O}_4 \mathfrak{A}_3|,\ |\mathfrak{A}_1' \mathfrak{O}_3 \mathfrak{A}_3|,$$

daß auch der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_4',\ \mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_1')$$

ein Punkt der $C^{(3)}$ sein muß. Indem wir auf diese Weise zu schließen fortfahren, erkennen wir endlich, dass der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}'_{n+1}, \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}_{n+1}) = \mathfrak{O}_{n+1}$$

ein Punkt der $C^{(3)}$ sein muß. Wenn nun das erste $2n$-Eck sich schließt, also

$$\mathfrak{A}_{n+1} \equiv \mathfrak{A}_1$$

wird, so kann die Gerade $|\mathfrak{O}_{n+1}\mathfrak{A}_1|$ nur noch in einem einzigen dritten Punkte der $C^{(3)}$ begegnen, es muß also

$$\mathfrak{A}'_{n+1} = \mathfrak{A}'_1$$

sein, d. h. auch das zweite Polygon muß sich mit gleicher Seitenzahl $2n$ schließen, und da der neue Anfangspunkt $\mathfrak{A}'_1$ ganz willkürlich auf der $C^{(3)}$ angenommen war, so schließt sich jedes in der angegebenen Weise konstruierte $2n$-Eck, sobald sich nur einmal ein solches schließt, wodurch der Steinersche Satz bewiesen ist.

3. Für zwei beliebig auf der $C^{(3)}$ gewählte Fundamentalpunkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ wird offenbar ein Schließen des Steinerschen $2n$-Ecks nicht stattfinden, sondern die Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ sind einer gewissen Bedingung unterworfen, damit ein Schließen stattfinde, welches dann unabhängig ist von der Wahl des Anfangspunktes für das $2n$-Eck. Wir können aber, wenn wir einmal ein Punktepaar $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ von der verlangten Eigenschaft haben, unendlich viele andere Paare von gleicher Eigenschaft ableiten, indem wir irgend einen Punkt $\mathfrak{S}$ der $C^{(3)}$ nehmen, ihn mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ verbinden und die dritten Schnittpunkte $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ aufsuchen. Liegen nämlich je drei Punkte

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{P}', \ \mathfrak{S}\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$$

auf einer Geraden, und bilden wir von einem Anfangspunkte $\mathfrak{A}_1$ aus rücksichtlich des Punktepaares $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ das Steinersche $2n$-Eck, welches sich schliessen soll, und von einem beliebigen andern Anfangspunkte $\mathfrak{A}'_1$ aus rücksichtlich des Punktepaares $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'$ nach gleicher Vorschrift ein Polygon, so muß, wie wir sofort sehen, auch dieses sich schließen und ein $2n$-Eck sein.

Wir haben nämlich gemäß der vorgeschriebenen Konstruktion je drei Punkte auf einer Geraden

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_1'\mathfrak{P}'\mathfrak{B}_1',\ \mathfrak{B}_1'\mathfrak{Q}'\mathfrak{A}_2', \\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2,\ \mathfrak{B}_2\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_3, & \mathfrak{A}_2'\mathfrak{P}'\mathfrak{B}_2',\ \mathfrak{B}_2'\mathfrak{Q}'\mathfrak{A}_3', \\ \cdots\cdots\ \ \cdots\cdots & \cdots\cdots\ \ \cdots\cdots \\ \underline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{P}\mathfrak{B}_n,\ \mathfrak{B}_n\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_{n+1},} & \underline{\mathfrak{A}_n'\mathfrak{P}'\mathfrak{B}_n',\ \mathfrak{B}_n'\mathfrak{Q}'\mathfrak{A}_{n+1}'} \\ \mathfrak{A}_{n+1}\equiv\mathfrak{A}_1. & \end{array}$$

Dann folgt aus den Paaren von Geraden

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{B}_1|,\quad |\mathfrak{A}_2\mathfrak{Q}\,\mathfrak{B}_1|,$$
$$|\mathfrak{A}_1'\mathfrak{P}'\mathfrak{B}_1'|,\quad |\mathfrak{A}_2'\mathfrak{Q}'\mathfrak{B}_1'|,$$

weil $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}'|$ und $|\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'|$ denselben dritten Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ auf der $C^{(3)}$ haben sollen, daß auch der Punkt

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1',\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2') = \mathfrak{D}$$

auf der $C^{(3)}$ liegen muß; in gleicher Weise folgt, daß auch der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2',\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3')$$

auf der $C^{(3)}$ liegen muß, also derselbe Punkt $\mathfrak{D}$ sein wird, weil $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'|$ nur noch in einem dritten Punkte die $C^{(3)}$ schneiden kann, und indem wir so fortfahren, erkennen wir, daß auch der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1',\ \mathfrak{A}_{n+1}\mathfrak{A}_{n+1}')$$

derselbe Punkt $\mathfrak{D}$ der $C^{(3)}$ sein muß; wenn nun das erste $2n$-Eck sich schließt, also

$$\mathfrak{A}_{n+1}\equiv\mathfrak{A}_1$$

wird, so muß, weil die Verbindungslinie jenes Punktes mit $\mathfrak{A}_1$ nur noch in einem dritten Punkte der $C^{(3)}$ begegnen kann, auch

$$\mathfrak{A}_{n+1}'\equiv\mathfrak{A}_1'$$

sein, also muß auch das zweite Polygon für das Paar von Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'$ sich schließen; mithin haben $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ die gleiche Eigenschaft wie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, also gilt der Satz:

Wenn ein Punktepaar $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ der $C^{(3)}$ die Eigenschaft besitzt, ein Steinersches $2n$-Eck zu liefern, welches sich schließt gemäß der vorgeschriebenen Konstruktion, wie auch sein Anfangspunkt gewählt werde, und man projiciert das Punktepaar

$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{S}$ der $C^{(3)}$ aus in ein neues Punktepaar $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'$, so besitzt dieses die gleiche Eigenschaft wie $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$.

Man kann also aus einem Punktepaar $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ unendlich viele andere ableiten. Gleichzeitig ersehen wir, daß die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ eines Paares miteinander vertauschbar sind; denn schneidet die Verbindungslinie $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|$ die $C^{(3)}$ zum dritten Mal in $\mathfrak{S}$, und projizieren wir von $\mathfrak{S}$ aus den Punkt $\mathfrak{P}$ auf die $C^{(3)}$, so erhalten wir den Punkt $\mathfrak{Q}$; projizieren wir aber $\mathfrak{Q}$, so erhalten wir $\mathfrak{P}$, also geht das Paar $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ in das neue Paar $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ über, was auch selbstverständlich ist, weil für $\mathfrak{A}_{n+1} \equiv \mathfrak{A}_1$ bei Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ das $2n$-Eck nur in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird.

Wir sehen ferner aus unserm Schema

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_2, \\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2, & \mathfrak{B}_2\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_3, \\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{P}\mathfrak{B}_3, & \mathfrak{B}_3\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_4, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mathfrak{A}_n\mathfrak{P}\mathfrak{B}_n, & \mathfrak{B}_n\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_{n+1}, \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathfrak{A}_{n+1} \equiv \mathfrak{A}_1,} \end{array}$$

weil $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{B}_1$ aus in die Punkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ projiziert werden, daß auch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ ein Steinersches Punktepaar in dem früheren Sinne ist, ebenso $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ u. s. f., $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}_1$; ferner weil $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{A}_2$ aus in die Punkte $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ projiziert werden, so sind auch $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, ebenso $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ u. s. f., $\mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{B}_1$ Steinersche Punktepaare, wie die ursprünglichen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Aus der vorigen Herleitung ergiebt sich noch ein weiteres Resultat, welches einen gewissen Zusammenhang liefert zwischen zwei beliebigen in der geforderten Art konstruierten $2n$-Ecken

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n$$

und

$$\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_2' \ldots \mathfrak{A}_n'\mathfrak{B}_n',$$

von denen das erste aus dem Steinerschen Punktepaar $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, das zweite aus $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'$ hervorgeht, wo $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ durch Projektion von $\mathfrak{S}$ aus gefunden sind, indem je drei Kurvenpunkte

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{P}', \quad \mathfrak{S}\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$$

auf einer Geraden liegen. Sind die Anfangspunkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1'$ willkürlich auf der $C^{(3)}$ gewählt, so schneiden sich alle Verbindungslinien

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'|, \ |\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'|, \ |\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'|, \ \ldots, \ |\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_n'|$$

in einem und demselben Punkte $\mathfrak{A}_0$ der Kurve; und ebenso auch alle Verbindungslinien

$$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|, \ |\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2'|, \ |\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_3'|, \ \ldots, \ |\mathfrak{B}_n\mathfrak{B}_n'|$$

in einem und demselben Punkte $\mathfrak{B}_0$ der Kurve, und die drei Punkte $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{S}$ liegen auf einer Geraden, denn aus den vorigen Paaren von Geraden

$$\begin{array}{ll} |\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{B}_1|, & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{Q}\mathfrak{B}_1|, \\ |\mathfrak{A}_1'\mathfrak{P}'\mathfrak{B}_1'|, & |\mathfrak{A}_2'\mathfrak{Q}'\mathfrak{B}_1'| \end{array}$$

folgt, daß der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie $|\mathfrak{A}_0\mathfrak{S}|$, den wir $\mathfrak{B}_0$ nennen wollen, auf $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'|$ liegen muß; in gleicher Weise aber auch auf $|\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2'|$, $|\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_3'|$ u. s. f.

Die ungeradstelligen Ecken beider $2n$-Ecke bilden also für sich zwei n-Ecke, welche perspektiv liegen rücksichtlich eines gewissen Punktes der $C^{(3)}$ und die geradstelligen ebenfalls zwei perspektiv liegende n-Ecke.

4. Aus der eigentümlichen Lage eines solchen $2n$-Ecks, wie wir es vermittelst zweier Fundamentalpunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ konstruiert haben

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_1\mathfrak{P}\mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_2, \\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2, & \mathfrak{B}_2\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_3, \\ \mathfrak{A}_3\mathfrak{P}\mathfrak{B}_3, & \mathfrak{B}_3\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_4, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \underline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{P}\mathfrak{B}_n,} & \underline{\mathfrak{B}_n\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_{n+1},} \end{array}$$
$$\mathfrak{A}_{n+1} \equiv \mathfrak{A}_1$$

ergiebt sich ein weiterer Zusammenhang zwischen den geradstelligen und ungeradstelligen Ecken; denn wir haben allgemein je drei Kurvenpunkte auf einer Geraden:

$$\begin{array}{ll} |\mathfrak{A}_i \quad \mathfrak{P}\mathfrak{B}_i|, & |\mathfrak{A}_{i+1}\mathfrak{Q}\mathfrak{B}_i|, \\ |\mathfrak{A}_{k+1}\mathfrak{Q}\mathfrak{B}_k|, & |\mathfrak{A}_k \quad \mathfrak{P}\mathfrak{B}_k|, \end{array}$$

woraus folgt, daß der Schnittpunkt

1) $$(\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_{k+1},\ \mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_{i+1})$$

auf der $C^{(3)}$ liegen muß; ebenso folgt aus den Geraden

$$|\mathfrak{B}_i \quad \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_{i+1}|, \quad |\mathfrak{B}_{i+1} \mathfrak{P} \mathfrak{A}_{i+1}|,$$
$$|\mathfrak{B}_{k+1} \mathfrak{P} \mathfrak{A}_{k+1}|, \quad |\mathfrak{B}_k \quad \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_{k+1}|,$$

daß der Schnittpunkt

2) $$(\mathfrak{B}_i \mathfrak{B}_{k+1},\ \mathfrak{B}_k \mathfrak{B}_{i+1})$$

ebenfalls ein Punkt der $C^{(3)}$ sein muß; und endlich folgt aus den Geraden

$$|\mathfrak{B}_i \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_{i+1}|, \quad |\mathfrak{B}_{i+1} \mathfrak{P} \mathfrak{A}_{i+1}|,$$
$$|\mathfrak{A}_k \mathfrak{P} \mathfrak{B}_k|, \quad |\mathfrak{A}_{k+1} \mathfrak{Q} \mathfrak{B}_k|,$$

daß der Schnittpunkt

3) $$(\mathfrak{B}_i \mathfrak{A}_k,\ \mathfrak{B}_{i+1} \mathfrak{A}_{k+1})$$

ebenfalls auf der $C^{(3)}$ liegen muß, wie auch die Indices i, k innerhalb der Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots, n$ gewählt werden mögen.

Aus 1) folgt für $k = i + 1$, daß der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie $|\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_{i+2}|$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{A}_{i+1}$ sein muß, aus 2), daß in gleicher Weise der Schnittpunkt von $|\mathfrak{B}_i \mathfrak{B}_{i+2}|$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{B}_{i+1}$ sein muß. Aus 3) folgt, daß die Verbindungslinien

$$|\mathfrak{B}_i \mathfrak{A}_k|, \ |\mathfrak{B}_{i+1} \mathfrak{A}_{k+1}|, \ |\mathfrak{B}_{i+2} \mathfrak{A}_{k+2}|, \ldots, |\mathfrak{B}_n \mathfrak{A}_{n+k-i}|,$$
$$|\mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_{n+k-i+1}|, \ldots, |\mathfrak{B}_{i-1} \mathfrak{A}_{k-1}|$$

sämtlich durch einen und denselben festen Punkt der $C^{(3)}$ gehen müssen.

5. Für ein willkürlich gewähltes Punktepaar $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ auf der $C^{(3)}$ wird sich im allgemeinen ein nach der vorgeschriebenen Art konstruiertes Steinersches $2n$-Eck nicht schließen. Die Bedingung dafür, daß es sich einmal, also immer schließt, wo auch der Anfangspunkt gewählt werden mag, geht aus der Konstruktion selbst hervor; in dem einfachsten Falle für $n = 2$, also für ein Viereck haben wir

das Punktepaar	die Seiten des Vierecks
$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$,	$\|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{P} \mathfrak{B}_1\|$, $\|\mathfrak{B}_1 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_2\|$,
	$\|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{P} \mathfrak{B}_2\|$, $\|\mathfrak{B}_2 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_1\|$.

Da es sich immer schließt, wo wir auch den Anfangspunkt wählen mögen, so wollen wir den Anfangspunkt $\mathfrak{A}_1$ nach $\mathfrak{P}$ verlegen, dann wird $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{P}_1$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{P}$; wegen $|\mathfrak{B}_1 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_2|$ schneidet $|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}|$ in $\mathfrak{A}_2$, und wegen $|\mathfrak{B}_2 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_1|$ schneidet $|\mathfrak{P} \mathfrak{Q}|$ in $\mathfrak{B}_2$. Da also die beiden Geraden

$$|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_2|,$$
$$|\mathfrak{P} \, \mathfrak{Q} \mathfrak{B}_2|$$

die $C^{(3)}$ in je drei Punkten durchschneiden, der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2|$ aber $\mathfrak{P}$ ist, der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}|$ ebenfalls $\mathfrak{P}$ ist, so muß die Verbindungslinie $|\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}|$ in $\mathfrak{P}_1$ schneiden, also $\mathfrak{P}_1$ auch der Tangentialpunkt $\mathfrak{Q}_1$ für $\mathfrak{Q}$ sein; mithin $\mathfrak{P}_1 \equiv \mathfrak{Q}_1$, also $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ müssen denselben Tangentialpunkt haben. Dies ist die Bedingung für das Punktepaar $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, damit ein Steinersches Viereck möglich sei; und umgekehrt: Wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ denselben Tangentialpunkt haben (oder wie wir uns früher ausgedrückt haben, ein Paar konjugierter Punkte der $C^{(3)}$ sind), dann ist für dieselben immer ein Steinersches Viereck möglich.

Für das Sechseck haben wir

das Punktepaar	die Seiten des Sechsecks	
$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$,	$\vert\mathfrak{A}_1 \mathfrak{P} \mathfrak{B}_1\vert$,	$\vert\mathfrak{B}_1 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_2\vert$,
	$\vert\mathfrak{A}_2 \mathfrak{P} \mathfrak{B}_2\vert$,	$\vert\mathfrak{B}_2 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_3\vert$,
	$\vert\mathfrak{A}_3 \mathfrak{P} \mathfrak{B}_3\vert$,	$\vert\mathfrak{B}_3 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_1\vert$.

Verlegen wir auch hier den willkürlich zu wählenden Anfangspunkt $\mathfrak{A}_1$ nach $\mathfrak{P}$, also $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{P}$, dann folgt $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{P}_1$, Tangentialpunkt zu $\mathfrak{P}$; und aus $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{Q} \mathfrak{B}_3|$ folgt $\mathfrak{B}_3$ als der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|$, also haben wir die beiden Geraden

$$|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_2|,$$
$$|\mathfrak{P} \, \mathfrak{Q} \mathfrak{B}_3|.$$

Nennen wir also $\mathfrak{Q}_1$ den Tangentialpunkt zu $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{S}$ den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_3|$, so folgt, daß $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{S}$ auf einer Geraden liegen müssen. Nun wissen wir aber aus 4., daß die drei Geraden

$$|\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3|,\ |\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1|,\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2|$$

sich in demselben Punkte $\mathfrak{S}$ der $C^{(3)}$ schneiden müssen, also liegen

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{S}\mathfrak{A}_3,$$
$$\mathfrak{P}\,\mathfrak{S}\mathfrak{B}_2$$

auf je einer Geraden; da aber $|\mathfrak{P}\mathfrak{S}|$ in $\mathfrak{Q}_1$ schneidet, so muß

$$\mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{Q}_1$$

sein, und da $|\mathfrak{P}\mathfrak{B}_2|$ in $\mathfrak{A}_2$ schneidet, so muß

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{A}_2$$

sein, und da $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{S}| \equiv |\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_2| \equiv |\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2|$ in $\mathfrak{Q}$ schneidet, so muß

$$\mathfrak{A}_3 \equiv \mathfrak{Q}$$

sein; folglich müssen sich $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}|$ und $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1|$ in $\mathfrak{S}$ auf der $C^{(3)}$ schneiden, und dies ist die gesuchte Bedingung für das Punktepaar $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$:

Sind für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die zugehörigen Tangentialpunkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$, und liegt der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1,\ \mathfrak{Q}\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{S}$$

auf der $C^{(3)}$, so sind $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ die Fundamentalpunkte für ein Steinersches Sechseck.

Wir sehen, wie sich diese Betrachtung fortsetzen läßt und sich die von Steiner noch für das Zehneck angegebene Bedingung in analoger Weise ergiebt.

6. Zwischen den Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ für ein $2n$-Eck und für ein $4n$-Eck besteht ein sehr einfacher Zusammenhang, sodaß sich aus einem solchen Paar das andere und umgekehrt ableiten läßt, wie wir jetzt sehen wollen.

Ist $\mathfrak{P}_1$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}_1$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{Q}$, und ziehen wir die folgenden Verbindungslinien, deren jedesmaligen dritten Schnittpunkt mit der $C^{(3)}$ wir aufsuchen

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{B}_1|,\ |\mathfrak{B}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{A}_2|,\ |\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}\mathfrak{E}_1|,\ |\mathfrak{E}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{D}_1|,$$
$$|\mathfrak{D}_1\mathfrak{P}\mathfrak{C}_1|,\ |\mathfrak{C}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{X}|,$$

so folgt, da wir noch die Geraden



$$|\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1| \text{ und } |\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1|$$

haben, aus den beiden Geraden

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{B}_1|,$$
$$|\mathfrak{C}_1\mathfrak{P}\,\mathfrak{A}_2|$$

die dritte Gerade

$$|\mathfrak{S}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}_1|,$$

wo $\mathfrak{S}$ den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1|$ bezeichnet.

Aus den beiden Geraden

$$|\mathfrak{C}_1\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1|,$$
$$|\mathfrak{D}_1\mathfrak{P}\mathfrak{C}_1|$$

folgt die dritte Gerade

$$|\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}|,$$

also muß $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1|$ durch $\mathfrak{Q}$ gehen, oder $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{Q}|$ durch $\mathfrak{A}_1$, was dasselbe sagt; mithin muß

$$\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{A}_1$$

sein, und wir haben folgende beiden Reihenfolgen von Geraden

1) $$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{A}_2|,$$

2) $$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_1|, \; |\mathfrak{C}_1\mathfrak{P}\mathfrak{D}_1|, \; |\mathfrak{D}_1\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_1|, \; |\mathfrak{C}_1\mathfrak{P}\mathfrak{A}_2|;$$

beide führen von $\mathfrak{A}_1$ nach $\mathfrak{A}_2$, die erste durch das Paar von Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1$, indem jeder nur einmal verwendet wird, die zweite durch das Paar von Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, indem jeder zweimal in der vorgeschriebenen Weise verwendet wird.

Wenn wir also auf diese Art fortgehen von $\mathfrak{A}_2$ zu $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und wir gelangen wieder zu $\mathfrak{A}_1$ zurück, so erhalten wir für das Paar von Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1$ ein Steinersches $2n$-Eck und für das Paar von Fundamentalpunkten $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ ein Steinersches $4n$-Eck. In diesen dürfen wir aber die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ miteinander vertauschen, wodurch nur das geschlossene Polygon in umgekehrter Richtung durchlaufen wird; also erhalten wir den Satz:

Sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ die Tangentialpunkte zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, und ist für erstere ein Steinersches $2n$-Eck möglich, so sind letztere die Fundamentalpunkte für ein Steinersches $4n$-Eck, und umgekehrt.

Da $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ die Tangentialpunkte zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind, so wird die Gerade $|\mathfrak{P}\mathfrak{Q}|$ die $C^{(3)}$ in einem dritten Punkte $\mathfrak{R}$ schneiden, dessen Tangentialpunkt $\mathfrak{R}_1$ mit $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ auf derselben Geraden liegen muß. Projizieren wir das Punktepaar $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}$ aus, so erhalten wir ein neues Punktepaar $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{R}$ von gleicher Beschaffenheit; $\mathfrak{R}$ ist aber der Berührungspunkt einer aus $\mathfrak{R}_1$ an die $C^{(3)}$ gelegten Tangente, also können wir auch sagen: Sind $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1$ ein Paar von Fundamentalpunkten für ein $2n$-Eck, schneidet $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1|$ in $\mathfrak{R}_1$, wird endlich aus $\mathfrak{R}_1$ eine Tangente an die $C^{(3)}$ gelegt, welche in $\mathfrak{R}$ berührt, so sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{R}$ ein Punktepaar für ein Steinersches $4n$-Eck, ebenso $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{R}$. In dieser Form hat Steiner das Theorem ausgesprochen, die obige mehr symmetrische rührt von Schoute her.

7. Das Steinersche Schließungsproblem läßt sich erweitern, wenn wir statt zweier Fundamentalpunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ mehrere annehmen und ein der $C^{(3)}$ einbeschriebenes Polygon bilden, dessen Seiten der Reihe nach durch die gegebenen Fundamentalpunkte hindurchgehen. Nehmen wir zunächst drei Fundamentalpunkte

$$\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{P}_3$$

und beginnen mit einem beliebigen Punkte $\mathfrak{A}_1$ der $C^{(3)}$ als erster Ecke eines Polygons die Seiten desselben zu konstruieren

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_2|,\ |\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}_2\mathfrak{A}_3|,\ |\mathfrak{A}_3\mathfrak{P}_3\mathfrak{A}_4|,$$
$$|\mathfrak{A}_4\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_5|,\ |\mathfrak{A}_5\mathfrak{P}_2\mathfrak{A}_6|,\ |\mathfrak{A}_6\mathfrak{P}_3\mathfrak{X}|,$$

wo $\mathfrak{X}$ der letzte Punkt ist, dann zeigt sich aus den Geraden

$$\begin{array}{lcl} |\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_2| & \text{und} & |\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}_2\mathfrak{A}_3|, \\ |\mathfrak{A}_6\mathfrak{P}_2\mathfrak{A}_5| & & |\mathfrak{A}_5\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_4|, \end{array}$$

daß der dritte Schnittpunkt derjenigen Geraden, welche die beiden Schnittpunkte von $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2|$ und $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_5|$ vereinigt, sowohl auf $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_6|$, als auch auf $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4|$ liegen muß; da aber der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4|$ der Punkt $\mathfrak{P}_3$ ist, so müssen

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_6,\ \mathfrak{P}_3$$

auf einer Geraden liegen, also $|\mathfrak{A}_6\mathfrak{P}_3|$ muß durch $\mathfrak{A}_1$ gehen; folglich ist



$$\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{A}_1,$$

und wir erhalten ein Sechseck, welches sich in $\mathfrak{A}_1$ schließt

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_5 \mathfrak{A}_6,$$

wo auch der Anfangspunkt $\mathfrak{A}_1$ gewählt sein mag, also gilt der Satz:

Nehmen wir drei beliebige Fundamentalpunkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ auf der $C^{(3)}$ und beginnen mit einem beliebigen Punkte $\mathfrak{A}_1$ ein Polygon der $C^{(3)}$ einzubeschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ gehen, so schließt sich dasselbe nach zweimaligem Durchgange durch die drei Fundamentalpunkte und bildet also immer ein geschlossenes der $C^{(3)}$ einbeschriebenes Sechseck.

Dieser Satz läßt eine Erweiterung zu für eine beliebige ungerade Anzahl von Fundamentalpunkten

$$\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{P}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{P}_m \qquad (m \text{ ungerade}).$$

Beginnen wir nämlich mit einem beliebig auf der $C^{(3)}$ gewählten Anfangspunkt $\mathfrak{A}_1$ das Polygon in der vorgeschriebenen Weise zu konstruieren, so sind seine Seiten

$$|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_2|,\ |\mathfrak{A}_2 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{A}_3|,\ |\mathfrak{A}_3 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{A}_4|,\ |\mathfrak{A}_4 \mathfrak{P}_4 \mathfrak{A}_5|,\ \ldots;$$

dann folgt aus den beiden Geraden

$$|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_2|,$$
$$|\mathfrak{A}_4 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{A}_3|,$$

weil $|\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3|$ durch den festen Punkt $\mathfrak{P}_2$ geht, wenn wir den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_3|$ mit der $C^{(3)}$ durch $\mathfrak{B}_1$ bezeichnen, daß $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_4|$ durch den dritten Schnittpunkt der Geraden $|\mathfrak{B}_1 \mathfrak{P}_2|$ hindurchgehen muß. Dieser Punkt hängt aber nur ab von den drei festen Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$; es wird nämlich der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_3|$ mit dem Punkt $\mathfrak{P}_2$ verbunden und auf dieser Verbindungslinie der dritte Schnittpunkt $\mathfrak{O}_1$ ermittelt; dann geht $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_4|$ notwendig durch diesen festen Punkt $\mathfrak{O}_1$, wie auch der Anfangspunkt $\mathfrak{A}_1$ gewählt werde auf der $C^{(3)}$, wobei natürlich auch der Endpunkt $\mathfrak{A}_4$ sich verändert.

Ferner folgt aus den beiden Geraden

$$|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{O}_1 \mathfrak{A}_4|,$$
$$|\mathfrak{A}_6 \mathfrak{P}_5 \mathfrak{A}_5|,$$

weil $|\mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_5|$ durch den festen Punkt $\mathfrak{P}_4$ geht, und der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{O}_1 \mathfrak{P}_5|$ auch ein fester $\mathfrak{B}_2$ ist, daß durch den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{B}_2 \mathfrak{P}_4|$, welcher ein fester Punkt sein wird, die veränderliche Sehne $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_6|$ hindurchgehen muß, wie wir auch den Anfangspunkt $\mathfrak{A}_1$ wählen mögen. Fahren wir in dieser Weise zu schließen fort, so sehen wir, daß auch $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_8|$ u. s. f. durch feste und nur von den $\mathfrak{P}$ abhängige Punkte laufen, unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes $\mathfrak{A}_1$.

Ist nun m eine ungerade Zahl, so muß auch $|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_{m+1}|$ durch einen festen Punkt $\mathfrak{O}$ laufen, weil $(m+1)$ gerade ist.

Beginnen wir jetzt die Reihe von neuem und konstruieren anstatt von $\mathfrak{A}_1$ auszugehen, von $\mathfrak{A}_{m+1}$ aus in gleicher Weise das Polygon

$$|\mathfrak{A}_{m+1} \mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_{m+2}|, \; |\mathfrak{A}_{m+2} \mathfrak{P}_2 \mathfrak{A}_{m+3}|, \; |\mathfrak{A}_{m+3} \mathfrak{P}_3 \mathfrak{A}_{m+4}| \; \ldots,$$

so wird die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}_{m+1} \mathfrak{A}_{2m+1}|$ durch denselben festen Punkt gehen müssen, der vorhin gefunden wurde und nur allein von den in bestimmter Reihenfolge zu verwendenden Punkten $\mathfrak{P}$ abhing, also ist der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_{m+1}, \; \mathfrak{A}_{m+1} \mathfrak{A}_{2m+1}) = \mathfrak{O}$$

ein Punkt der $C^{(3)}$. Da aber die Gerade $|\mathfrak{O} \mathfrak{A}_{m+1}|$ nur noch in einem einzigen dritten Punkte der $C^{(3)}$ begegnen kann, so folgt

$$\mathfrak{A}_{2m+1} \equiv \mathfrak{A}_1,$$

und wir haben ein geschlossenes $2m$-Eck

$$|\mathfrak{A}_1 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_2|, \; |\mathfrak{A}_2 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{A}_3|, \; |\mathfrak{A}_3 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{A}_4|, \; \ldots, \; |\mathfrak{A}_m \mathfrak{P}_m \mathfrak{A}_{m+1}|,$$
$$|\mathfrak{A}_{m+1} \mathfrak{P}_1 \mathfrak{A}_{m+2}|, \; |\mathfrak{A}_{m+2} \mathfrak{P}_2 \mathfrak{A}_{m+3}|, \; \ldots, \; |\mathfrak{A}_{2m} \mathfrak{P}_m \mathfrak{A}_1|.$$

Wir haben also folgenden Satz gewonnen:

Nehmen wir eine ungerade Anzahl von Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots, \mathfrak{P}_m$ und beginnen mit einem beliebigen Anfangspunkte $\mathfrak{A}_1$ ein Polygon der $C^{(3)}$ einzubeschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots, \mathfrak{P}_m$ gehen, indem wir nach Er-



schöpfung dieser Reihe dieselbe noch einmal in gleicher Reihenfolge verwenden, so schließt sich das Polygon nach zweimaligem Durchgange durch die Fundamentalpunkte und bildet also immer ein geschlossenes, der $C^{(3)}$ einbeschriebenes $2m$-Eck.

Verlangt man dagegen, es solle schon $\mathfrak{A}_{m+1}$ mit $\mathfrak{A}_1$ koinzidieren, so müßte der allein von den Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}$ abhängige Punkt $\mathfrak{O}$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{A}_1$ sein; da aber im allgemeinen aus $\mathfrak{O}$ vier Tangenten an die $C^{(3)}$ gehen, so giebt es auch nur vier Lagen für den Punkt $\mathfrak{A}_1$, damit schon ein von ihm ausgehendes, in der vorgeschriebenen Weise zu konstruierendes m-Eck sich schließe nach einmaligem Durchlaufen der Fundamentalpunkte.

8. Nehmen wir andererseits m gerade an, so folgt aus dem Vorigen (7.), daß bei beliebiger Wahl des Anfangspunktes $\mathfrak{A}_1$ die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_m|$ durch einen festen, nur von den Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_m$ abhängigen Punkt $\mathfrak{O}$ gehen muß. Verlangen wir jetzt, daß schon $\mathfrak{A}_{m+1} \equiv \mathfrak{A}_1$ werden, also das m-Eck sich schließen soll, dann müßte der feste, allein von den $\mathfrak{P}$ abhängige Punkt $\mathfrak{O}$, durch welchen $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_m|$ gehen muß, mit $\mathfrak{P}_m$ koinzidieren; es würde also dadurch eine Bedingung zwischen den Fundamentalpunkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_m$ gegeben sein. Ist dieselbe einmal erfüllt, dann wird das m-Eck sich unabhängig von der Wahl seines Anfangspunktes immer schließen, im allgemeinen bei willkürlicher Wahl der Fundamentalpunkte auf der $C^{(3)}$ aber nicht.

Die Bedingung dafür, daß ein Schließen stattfinde, können wir aus der Konstruktion der festen Punkte $\mathfrak{O}$ selbst ableiten; dieselben wurden nämlich so konstruiert (S. 268, 269)

$|\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3\mathfrak{B}_1|$
$|\mathfrak{B}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{O}_1| \ldots |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4|$ geht durch $\mathfrak{O}_1$,
$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_5\mathfrak{B}_2|$
$|\mathfrak{B}_2\mathfrak{P}_4\mathfrak{O}_2| \ldots |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_6|$ „ „ $\mathfrak{O}_2$,
$|\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}_7\mathfrak{B}_3|$
$|\mathfrak{B}_3\mathfrak{P}_6\mathfrak{O}_3| \ldots |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_8|$ „ „ $\mathfrak{O}_3$

u. s. f., also für ein gerades m

$$|\mathfrak{B}_{\frac{m}{2}-1}\mathfrak{P}_{m-1}\mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-1}| \ldots |\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_m| \text{ geht durch } \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-1},$$

also müßte sein

$$\mathfrak{P}_m \equiv \mathfrak{D}_{\frac{m}{2}-1}.$$

Hinsichtlich der umfangreichen weiteren Untersuchungen, welche sich an das Steinersche Schließungsproblem anschließen, müssen wir auf die oben angegebenen Quellen verweisen.

§ 32. Kegelschnitte, welche die $C^{(3)}$ mehrpunktig berühren (oskulieren).

1. Durch fünf Punkte ist ein Kegelschnitt im allgemeinen bestimmt; legen wir nun durch fünf Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$ einer $C^{(3)}$ einen Kegelschnitt, so begegnet derselbe noch in einem sechsten Punkte $\mathfrak{B}$ der Kurve, welcher in verschiedener Weise gefunden werden kann; zieht man $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2|$, welche Gerade in $\mathfrak{A}'$ zum dritten Mal die $C^{(3)}$ treffen möge, $|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4|$, welche in $\mathfrak{A}''$ treffen möge, $|\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''|$, welche in $\mathfrak{A}'''$ treffe, dann muß $|\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}'''|$ in $\mathfrak{B}$, dem gesuchten Punkte treffen; denn weil die drei Geraden

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'|,$$
$$|\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}''|,$$
$$|\mathfrak{A}_5\mathfrak{B}\mathfrak{A}'''|$$

neun associierte Punkte (Grundpunkte eines Kurvenbüschels dritter Ordnung, § 10, 2.) ausschneiden und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ auf einer Geraden liegen, so müssen die übrigen sechs $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{B}$ auf einem Kegelschnitt liegen.

Wir können nun die fünf Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$ einander unendlich nahe rücken d. h. zusammenfallen lassen, also einen Kegelschnitt bestimmen, welcher in einem Punkte $\mathfrak{A}$ die $C^{(3)}$ fünfpunktig berührt; dann wird die Konstruktion des sechsten Schnittpunktes folgende:

Da $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ zusammenfallen in $\mathfrak{A}$, so wird $\mathfrak{A}'$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{A}$; da auch $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ nach $\mathfrak{A}$ hineinfallen, so wird auch $\mathfrak{A}''$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{A}$; also $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ fallen zusammen, mithin wird $\mathfrak{A}'''$ der Tangentialpunkt zu



$\mathfrak{A}'$, und jetzt schneidet $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'''|$ in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{B}$, also:

Eine Kurve $C^{(3)}$ kann im allgemeinen in jedem ihrer Punkte $\mathfrak{A}$ fünfpunktig von einem Kegelschnitt berührt werden; der sechste Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ des Kegelschnitts mit der $C^{(3)}$ wird dann so gefunden: Man bestimme zu $\mathfrak{A}$ den Tangentialpunkt $\mathfrak{A}_1$, zu $\mathfrak{A}_1$ den Tangentialpunkt $\mathfrak{A}_2$, und ziehe $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2|$, welche Gerade in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{B}$ der $C^{(3)}$ begegnen wird.*

Hierdurch wird jedem Punkte $\mathfrak{A}$ der $C^{(3)}$ ein bestimmter Punkt $\mathfrak{B}$ zugeordnet. Nehmen wir drei Punkte

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}',\ \mathfrak{A}''$$

der $C^{(3)}$, konstruieren in jedem derselben den fünfpunktig berührenden Kegelschnitt und nennen den jedesmaligen sechsten Schnittpunkt

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}',\ \mathfrak{B}'',$$

so haben wir, um diese Punkte zu ermitteln, die drei Tangentialpunkte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ aufzusuchen

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_1',\ \mathfrak{A}_1'',$$

von diesen wieder die drei Tangentialpunkte

$$\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_2',\ \mathfrak{A}_2''$$

und auf den drei Verbindungslinien $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2|$, $|\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_2'|$, $|\mathfrak{A}''\mathfrak{A}_2''|$ die dritten Schnittpunkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ $\mathfrak{B}''$.

Werden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ auf der $C^{(3)}$ so gewählt, daß sie in gerader Linie liegen, so müssen bekanntlich auch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_1''$ auf einer Geraden liegen, und folglich auch $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_2''$; aus den beiden Geraden

$$|\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}''|,$$
$$|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_2''|$$

folgt aber die dritte

$$|\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}'\mathfrak{B}''|,$$

also:

---

* J. Steiner: „Sätze über Kurven zweiter und dritter Ordnung“, Crelles Journal f. Math. Bd. XXXII, S. 301.

Konstruiert man in drei auf einer Geraden liegenden Punkten der $C^{(3)}$ die fünfpunktig berührenden Kegelschnitte, so liegen ihre drei sechsten Schnittpunkte wieder auf einer Geraden.

Werden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ so gewählt auf der $C^{(3)}$, daß in ihnen ein Kegelschnitt dreimal die Kurve zweipunktig berührt, d. h. bilden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ ein Tripel von Punkten der $C^{(3)}$ (§ 8, 3.), so liegen ebenfalls die drei Tangentialpunkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_1''$ auf einer Geraden, denn die drei Geraden

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|, \ |\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'|, \ |\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1''|$$

schneiden die $C^{(3)}$ in einer Gruppe von neun associierten Punkten, folglich müssen, da $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}''$ auf einem Kegelschnitt liegen, die drei übrigen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_1''$ auf einer Geraden liegen; hieraus folgt, daß auch $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2', \mathfrak{A}_2''$ und endlich auch $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$ auf einer Geraden liegen, also:

Berührt ein Kegelschnitt die $C^{(3)}$ in drei verschiedenen Punkten, und konstruiert man in jedem derselben den fünfpunktig berührenden Kegelschnitt, so liegen die drei sechsten Schnittpunkte dieser drei Kegelschnitte auf einer Geraden.

2. Suchen wir nunmehr auf der $C^{(3)}$ einen solchen besonderen Punkt $\mathfrak{A}$ auf, daß für den in $\mathfrak{A}$ fünfpunktig berührenden Kegelschnitt auch noch der sechste Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ hineinfällt. Dann müßte nach unserer Konstruktion $\mathfrak{A}_2$ der Tangentialpunkt von $\mathfrak{A}$ werden, weil $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_2$ in einer Geraden liegen.

Der Tangentialpunkt von $\mathfrak{A}$ ist aber $\mathfrak{A}_1$, also müßte $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}_2$ zusammenfallen, und da $\mathfrak{A}_2$ auch der Tangentialpunkt von $\mathfrak{A}_1$ ist, so müßte $\mathfrak{A}_1$ mit seinem Tangentialpunkte zusammenfallen, folglich müßte $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{W}$ ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ sein, und der gesuchte Punkt $\mathfrak{A}$ der Berührungspunkt einer aus dem Wendepunkte $\mathfrak{W}$ an die $C^{(3)}$ gelegten Tangente; auch umgekehrt zeigt sich, daß, wenn dies der Fall ist, in dem so gefundenen Punkte $\mathfrak{A}$ ein Kegelschnitt die $C^{(3)}$ sechspunktig berühren muß. Da aus jedem Wendepunkte der $C^{(3)}$ im allgemeinen drei Tangenten an die $C^{(3)}$ gehen und es neun Wendepunkte giebt, so schließen wir:

Es giebt 27 Punkte auf der $C^{(3)}$, in welchen Kegelschnitte dieselbe sechspunktig berühren. Dies sind diejenigen Punkte, in welchen die neun harmonischen Polaren der Wendepunkte die $C^{(3)}$ schneiden, oder, was dasselbe sagt, diejenigen Punkte, welche die konjugierten sind zu den neun Wendepunkten in jedem der drei Systeme von konjugierten Punktepaaren auf der $C^{(3)}$.

Da von den neun Wendepunkten nur drei reell und sechs imaginär sind, die drei reellen Wendepunkte aber auf dem unpaaren Zuge der $C^{(3)}$ liegen, ferner aus jedem Punkte dieses unpaaren Zuges vier reelle Tangenten an die Kurve gehen, so schließen wir, im Falle dieser Punkt ein reeller Wendepunkt ist, also eine der vier reellen Tangenten in die Wendetangente hineinfällt, daß die drei übrigen Tangenten aus ihm reell sind, und zwar eine derselben an den unpaaren, die andern beiden an den paaren Zug gehen; im Falle der zweizügigen $C^{(3)}$ sind also von den obigen 27 Punkten 9 reell und 18 imaginär.*

Zwischen den 27 Punkten, in welchen Kegelschnitte die $C^{(3)}$ sechspunktig berühren, bestehen infolge der Lage der neun Wendepunkte mehrfache Beziehungen. Legen wir nämlich aus einem Wendepunkte $\mathfrak{W}$ der $C^{(3)}$ eine Tangente an dieselbe mit dem Berührungspunkt $\mathfrak{A}$, so müssen, weil $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{A}$ denselben Tangentialpunkt $\mathfrak{W}$ haben, diese ein Paar konjugierter Punkte für die $C^{(3)}$ sein; durch ein solches Paar ist ein ganzes System unendlich vieler Paare konjugierter Punkte eindeutig bestimmt und wird erhalten, indem man einen beliebigen Kurvenpunkt mit dem ersten Paare verbindet und als dritte Schnittpunkte dieser beiden Verbindungsstrahlen ein neues Paar konjugierter Punkte desselben Systems findet.

Nun giebt es aber drei solcher Systeme konjugierter Punktepaare auf der $C^{(3)}$ (§ 15). Gehen also aus $\mathfrak{W}$ die drei übrigen Tangenten $|\mathfrak{W}\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{W}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{W}\mathfrak{C}|$ an die $C^{(3)}$,

* J. Steiner: „Sätze über Kurven zweiter und dritter Ordnung", Crelles Journal Bd. XXXII, S. 300.

so bestimmt das Punktepaar $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{A}$ das eine System, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{B}$ das zweite System, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{C}$ das dritte System von Paaren konjugierter Punkte auf der $C^{(3)}$. Was von dem Wendepunkte $\mathfrak{W}$ gilt, gilt von jedem der neun Wendepunkte $\mathfrak{W}_i^k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ (§ 28). Gehen daher aus einem zweiten Wendepunkte $\mathfrak{W}'$ die drei Tangenten $|\mathfrak{W}'\mathfrak{A}'|$, $|\mathfrak{W}'\mathfrak{B}'|$, $|\mathfrak{W}'\mathfrak{C}'|$ an die $C^{(3)}$, so gehören $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{A}'$ als ein Paar konjugierter Punkte einem ganz bestimmten der drei Systeme an, ebenso $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{C}'$, und es ist keine Freiheit mehr in der Zuordnung der konjugierten Punkte gestattet, sobald von dem ersten Wendepunkt aus die drei Systeme konjugierter Punktepaare bereits festgelegt sind.

Wir wissen aber aus § 15, daß aus zwei Paaren konjugierter Punkte desselben Systems allemal ein drittes Paar dieses Systems abgeleitet werden kann durch doppeltes kreuzweises Verbinden der Punkte; gehören nämlich $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{A}'$ als Paare konjugierter Punkte demselben System an, so werden die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{W}\mathfrak{W}',\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}') = \mathfrak{W}'',$$
$$(\mathfrak{W}\mathfrak{A}',\ \mathfrak{A}\mathfrak{W}') = \mathfrak{A}''$$

ein drittes Paar konjugierter Punkte $\mathfrak{W}''$ und $\mathfrak{A}''$ dieses Systems sein.

Ferner wissen wir, daß aus zwei Paaren konjugierter Punkte, deren eines dem ersten, das andere dem zweiten Systeme angehört, allemal ein neues Paar konjugierter Punkte, welches dem dritten Systeme angehören muß, gefunden wird (S. 118); gehören nämlich $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{A}$ dem ersten, $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{B}'$ dem zweiten System an, so schneiden

$$|\mathfrak{W}\mathfrak{W}'| \text{ und } |\mathfrak{A}\mathfrak{B}'|$$

die $C^{(3)}$ in einem neuen Paare konjugierter Punkte

$$\mathfrak{W}'' \text{ und } \mathfrak{C}'',$$

welches dem dritten Systeme angehört.

Aus diesen beiden Eigenschaften ergiebt sich der Zusammenhang zwischen den 27 Punkten, in welchen Kegelschnitte die $C^{(3)}$ sechspunktig berühren. Diese Punkte paaren sich nämlich mit den neun Wendepunkten zu je

neun Paaren konjugierter Punkte in den drei Systemen derselben.

Aus dem ersten Satze folgt, da die Verbindungslinie zweier Wendepunkte $|\mathfrak{W}\mathfrak{W}'|$ bekanntlich die $C^{(3)}$ immer in einem dritten Wendepunkte $\mathfrak{W}''$ treffen muß, daß auch die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|$ durch den Wendepunkt $\mathfrak{W}''$, ebenso $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}''|$ durch $\mathfrak{W}'$, $|\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''|$ durch $\mathfrak{W}$ gehen muß, also:

Verbindet man von den 27 Punkten, in welchen Kegelschnitte die $C^{(3)}$ sechspunktig berühren, zwei solche, deren Tangentialpunkte zugleich ihre konjugierten Punkte sind (d. h. ist zu $\mathfrak{A}$ der Wendepunkt $\mathfrak{W}$, zu $\mathfrak{A}'$ der Wendepunkt $\mathfrak{W}'$ der konjugierte, gehören also $\mathfrak{A}\mathfrak{W}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{W}'$ demselben Systeme an), so geht diese Verbindungslinie allemal durch einen dritten Wendepunkt. Solcher Geraden giebt es also im allgemeinen $3 \cdot \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 108$.

Aus dem zweiten Satze folgt, da $|\mathfrak{W}\mathfrak{W}'|$ die $C^{(3)}$ in dem dritten Wendepunkte $\mathfrak{W}''$ schneidet, daß auch die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}'|$ in einem Punkte $\mathfrak{C}''$ schneiden muß, welcher mit $\mathfrak{W}''$ ein Paar konjugierter Punkte des dritten Systems bildet, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{W}$ dem ersten, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{W}'$ dem zweiten System angehören, also:

Die 27 Punkte, in welchen Kegelschnitte die $C^{(3)}$ sechspunktig berühren, liegen zu je dreien auf geraden Linien, nämlich immer ein Punkt $\mathfrak{A}$, welcher mit seinem Tangentialpunkt $\mathfrak{W}$ dem einen System, ein Punkt $\mathfrak{B}'$, welcher mit seinem Tangentialpunkt $\mathfrak{W}'$ dem zweiten System, und ein Punkt $\mathfrak{C}''$, welcher mit seinem Tangentialpunkt $\mathfrak{W}''$ dem dritten System konjugierter Punkte angehört, wobei $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}'\,\mathfrak{W}''$ drei in gerader Linie liegende Wendepunkte der $C^{(3)}$ sind. Solcher Geraden giebt es im allgemeinen 81.

Zu ihnen gehören auch die neun harmonischen Polaren der Wendepunkte. Die übrigen 72 entspringen aus den 12 Wendepunktslinien, deren jede drei Wendepunkte $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}', \mathfrak{W}''$ enthält; sind nämlich aus jedem derselben die drei übrigen Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte seien $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$,

$\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''$, so können wir nur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}'$ oder $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{C}'$ verbinden, denn die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|$ geht durch einen Wendepunkt; die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}'|$ muß aber einen bestimmten Punkt $\mathfrak{C}''$ enthalten, $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}'|$ den bestimmten Punkt $\mathfrak{B}''$; ebenso $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}'\mathfrak{A}''|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}''|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}''|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}''|$, also giebt es für die Wendepunktslinie $|\mathfrak{W}\mathfrak{W}'\mathfrak{W}''|$ nur sechs solcher Linien $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, mithin im ganzen nur $12 . 6 = 72$, zu denen die neun harmonischen Polaren hinzutreten.

Aus dem in § 9, 8. bewiesenen Satze, daß wenn sechs Punkte einer $C^{(3)}$ auf einem Kegelschnitt liegen, auch ihre sechs konjugierten Punkte in einem der drei Systeme allemal auf einem Kegelschnitt liegen müssen, folgt eine weitere Beziehung zwischen unsern 27 Punkten, welche in den drei Systemen den neun Wendepunkten konjugiert sind. Die Wendepunkte liegen nämlich zu dreien auf den zwölf Wendepunktsgeraden (§ 28), und diese lassen sich paarweise als ausgeartete Kegelschnitte auffassen, was $\frac{12 . 11}{1 . 2} = 66$ Linienpaare giebt, also:

Von den 27 Punkten, in welchen Kegelschnitte die $C^{(3)}$ sechspunktig berühren, liegen immer gewisse sechs auf einem Kegelschnitte, nämlich solche sechs, deren Tangentialpunkte gleichzeitig die konjugierten Punkte in einem und demselben Systeme auf der $C^{(3)}$ sind und zwar sechs Wendepunkte, die zu je dreien auf zwei Wendepunktslinien liegen. Solcher Kegelschnitte giebt es im allgemeinen 66.

Hieraus folgt, daß solche neun Punkte, welche die konjugierten Punkte der neun Wendepunkte sind in einem der drei Systeme von konjugierten Punktepaaren auf der $C^{(3)}$, niemals eine Gruppe von neun associierten Punkten bilden; denn in diesem Falle müßten, da sechs von ihnen auf einem Kegelschnitt liegen, die drei übrigen auf einer Geraden liegen. Dies ist aber nicht der Fall, denn die Verbindungslinie zweier geht immer durch einen Wendepunkt, kann also keinen vierten Punkt mehr enthalten.

3. Während in jedem Punkte die $C^{(3)}$ von einem Kegelschnitt fünfpunktig berührt werden kann und nur in ausgezeichneten (27) Punkten Kegelschnitte dieselbe sechspunktig berühren, giebt es unendlich viele Kegelschnitte, welche in einem gegebenen Punkte $\mathfrak{P}$ dieselbe vierpunktig berühren. Durch vier Punkte der $C^{(3)}$ als Grundpunkte eines Büschels gehen überhaupt unendlich viele Kegelschnitte, welche noch in je zwei übrigen Punkten der $C^{(3)}$ begegnen, deren Verbindungslinien sämtlich durch einen festen Punkt der $C^{(3)}$ laufen (§ 9, 1.), den Gegenpunkt zu den Grundpunkten des Büschels.

Läßt man die vier Grundpunkte des Büschels einander unendlich nahe rücken, sodaß sie in einen einzigen Punkt $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ zusammenfallen, so nimmt das Kegelschnittbüschel einen besonderen Charakter an und besteht aus sämtlichen Kegelschnitten, welche die $C^{(3)}$ in $\mathfrak{P}$ vierpunktig berühren. Der Gegenpunkt $\mathfrak{Q}$, durch welchen alle von den Kegelschnitten ausgeschnittenen Sehnen (Verbindungslinien der beiden übrigen Schnittpunkte der $C^{(3)}$ mit einem in $\mathfrak{P}$ vierpunktig berührenden Kegelschnitt) laufen, wird gefunden durch den besonderen Kegelschnitt, welcher aus der doppelt zu zählenden Tangente in $\mathfrak{P}$ besteht; schneidet diese Tangente in dem Tangentialpunkt $\mathfrak{P}_1$, so fallen in $\mathfrak{P}_1$ zwei Punkte zusammen, die eins der vorigen Paare bilden; die Tangente in $\mathfrak{P}_1$ schneide zum dritten Mal in $\mathfrak{Q}$, dann ist offenbar $\mathfrak{Q}$ der gesuchte Gegenpunkt.

Da durch $\mathfrak{Q}$ außer der Tangente $|\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_1|$ im allgemeinen noch drei andere Tangenten an die $C^{(3)}$ gehen, so folgt:

Soll in einem Punkte $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ ein Kegelschnitt dieselbe vierpunktig berühren, so giebt es unter allen diesen Kegelschnitten im allgemeinen drei, welche außerdem noch in einem andern Punkte die $C^{(3)}$ zweipunktig berühren. Die Berührungspunkte dieser drei Kegelschnitte werden gefunden, indem man in $\mathfrak{P}$ die Tangente zieht, ihren Tangentialpunkt $\mathfrak{P}_1$ aufsucht, in $\mathfrak{P}_1$ aufs neue die Tangente zieht, deren Tangentialpunkt $\mathfrak{Q}$ sei, und aus $\mathfrak{Q}$ die

drei noch übrigen Tangenten an die $C^{(3)}$ legt, deren Berührungspunkte die drei gesuchten sind.

Man kann die drei Berührungspunkte auch noch in anderer Weise finden; geht nämlich eine Tangente aus $\mathfrak{Q}$ an die $C^{(3)}$, welche in $\mathfrak{T}$ berühre, und zieht man $|\mathfrak{P}\mathfrak{T}|$, welche in $\mathfrak{R}$ zum dritten Mal der $C^{(3)}$ begegnet, so wird, weil zu $\mathfrak{P}$ der Tangentialpunkt $\mathfrak{P}_1$, zu $\mathfrak{T}$ der Tangentialpunkt $\mathfrak{Q}$ ist, auch der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{R}$ auf $|\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_1|$ liegen müssen; der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_1|$ ist aber $\mathfrak{P}_1$, folglich muß $\mathfrak{P}_1$ auch der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{R}$ sein. Hieraus folgt:

Legt man aus dem Tangentialpunkt $\mathfrak{P}_1$ für den gegebenen Punkt $\mathfrak{P}$ die drei noch übrigen Tangenten an die $C^{(3)}$ und verbindet die drei Berührungspunkte derselben mit $\mathfrak{P}$, so schneiden diese drei Geraden die $C^{(3)}$ in den drei neuen Punkten $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \mathfrak{T}''$, welche die gesuchten Berührungspunkte der drei Kegelschnitte sind, die in $\mathfrak{P}$ vierpunktig und in $\mathfrak{T}$ (bez. $\mathfrak{T}', \mathfrak{T}''$) zweipunktig die $C^{(3)}$ berühren.

Die Aufgabe: „in einem gegebenen Punkte $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ einen vierpunktig berührenden Kegelschnitt zu legen, der noch in einem andern Punkte die Kurve zweipunktig berührt“, hat also im allgemeinen drei Lösungen.

Will man umgekehrt in einem Punkte $\mathfrak{T}$ einen zweipunktig berührenden Kegelschnitt konstruieren, der noch in einem andern Punkte $\mathfrak{P}$ vierpunktig berühren soll, so nehme man zu $\mathfrak{T}$ den Tangentialpunkt $\mathfrak{Q}$, lege aus $\mathfrak{Q}$ eine Tangente an die $C^{(3)}$, welche in $\mathfrak{P}_1$ berührt (deren es nur noch drei giebt), und ziehe aus dem Berührungspunkt $\mathfrak{P}_1$ eine Tangente an die $C^{(3)}$, welche in $\mathfrak{P}$ berührt (deren es vier giebt), dann ist $\mathfrak{P}$ der gesuchte Punkt.

Die Aufgabe: „in einem gegebenen Punkte $\mathfrak{T}$ der $C^{(3)}$ einen zweipunktig berührenden Kegelschnitt zu legen, welcher noch in einem andern Punkte die Kurve vierpunktig berührt“, hat also im allgemeinen zwölf Lösungen.

Will man durch zwei Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer $C^{(3)}$ einen Kegelschnitt legen, welcher außerdem die Kurve in einem dritten Punkte $\mathfrak{P}$ vierpunktig berühren soll, so ziehe man

$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und ermittele ihren dritten Schnittpunkt $\mathfrak{Q}$, lege aus $\mathfrak{Q}$ eine Tangente an die $C^{(3)}$, welche in $\mathfrak{P}_1$ berühre (deren es vier giebt), und aus $\mathfrak{P}_1$ eine neue Tangente an die $C^{(3)}$, welche in $\mathfrak{P}$ berührt (deren es ebenfalls vier giebt), dann ist ein solcher Punkt $\mathfrak{P}$ der gesuchte; diese Aufgabe hat also im allgemeinen sechszehn Lösungen.

4. In einem Punkte $\mathfrak{A}$ der $C^{(3)}$ kann man doppelt unendlich viele dreipunktig berührende Kegelschnitte legen, welche außerdem im allgemeinen noch in drei übrigen Punkten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ die $C^{(3)}$ schneiden. Verlangt man, daß auch die drei übrigen Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ in einen einzigen $\mathfrak{B}$ zusammenrücken sollen, also ein Kegelschnitt die $C^{(3)}$ in zwei verschiedenen Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dreipunktig berühren soll, so sind die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer Bedingung unterworfen, die so gefunden werden kann. Denkt man sich drei benachbarte Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{W}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{A}'\mathfrak{W}'\mathfrak{B}'|$, $|\mathfrak{A}''\mathfrak{W}''\mathfrak{B}''|$, deren neun Schnittpunkte mit der $C^{(3)}$ eine Gruppe von neun associierten Punkten bilden, und läßt man sodann die drei Geraden zusammenfallen, sodaß $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}''$ die beiden Berührungspunkte eines zweimal dreipunktig berührenden Kegelschnitts werden, dann müssen die drei Punkte $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}', \mathfrak{W}''$ auf einer Geraden liegen, also der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ mit der $C^{(3)}$ muß ein Wendepunkt $\mathfrak{W}$ der $C^{(3)}$ sein, und auch umgekehrt, also:

Zieht man durch einen Wendepunkt $\mathfrak{W}$ der $C^{(3)}$ eine beliebige Gerade, welche in den beiden Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der $C^{(3)}$ begegnet, so giebt es allemal einen Kegelschnitt, welcher gleichzeitig sowohl in $\mathfrak{A}$ wie in $\mathfrak{B}$ die Kurve dreipunktig berührt.

Ist $\mathfrak{A}$ gegeben, so findet man also, da es neun Wendepunkte giebt, neun Kegelschnitte, welche außer in $\mathfrak{A}$ noch in einem zweiten Punkte $\mathfrak{B}$ die Kurve dreipunktig berühren. (Von diesen sind drei reell und sechs imaginär.)

Nimmt man drei Wendepunkte $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3$, welche auf einer Geraden (Wendepunktslinie) liegen, und projiciert dieselben von einem Punkte $\mathfrak{P}$ der $C^{(3)}$ aus in die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, sodaß

$$\mathfrak{P}\mathfrak{W}_1\mathfrak{A},\quad \mathfrak{P}\mathfrak{W}_2\mathfrak{B},\quad \mathfrak{P}\mathfrak{W}_3\mathfrak{C}$$

auf je einer Geraden liegen, so giebt es drei Kegelschnitte, von denen der eine in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{A}$, der andere in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}$, der dritte in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{C}$ die Kurve zweimal dreipunktig berührt. Die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ stehen dann in einer eigentümlichen Verbindung mit einander; da nämlich die neun Durchschnittspunkte der drei Geraden

$$|\mathfrak{P}\mathfrak{W}_1\mathfrak{A}|,\ |\mathfrak{P}\mathfrak{W}_2\mathfrak{B}|,\ |\mathfrak{P}\mathfrak{W}_3\mathfrak{C}|$$

eine Gruppe von neun associierten Punkten bilden, und die drei Punkte $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3$ auf einer Geraden liegen, so müssen die sechs übrigen auf einem Kegelschnitt liegen; es giebt also einen Kegelschnitt, welcher in $\mathfrak{P}$ die $C^{(3)}$ dreipunktig berührt und außerdem durch die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ geht. Aus den beiden in je sechs Punkten schneidenden Kegelschnitten

$$[\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}] \text{ und } [\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

folgt, daß der Gegenpunkt für das Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}, \mathfrak{A}$, sowohl der Tangentialpunkt $\mathfrak{A}_1$ zu $\mathfrak{A}$, als auch der dritte Schnittpunkt von $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ mit der $C^{(3)}$ sein muß, also liegen

$$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{A}_1$$

und ebenso

$$\mathfrak{C},\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B}_1$$
$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}_1$$

auf einer Geraden, wenn $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ die Tangentialpunkte für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bedeuten.

Die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ haben also eine solche Lage, daß die Verbindungslinie zweier in dem Tangentialpunkt des dritten der Kurve begegnet.

Haben die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ eine solche eigentümliche Lage, so haben die drei neuen Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$, ihre Tangentialpunkte, eine gleiche Lage, denn aus den beiden Geraden

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1|,$$
$$|\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1|$$

folgt, weil $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ in $\mathfrak{A}_1$ schneidet und die Tangente $|\mathfrak{A}\mathfrak{A}|$ auch in $\mathfrak{A}_1$, daß der Tangentialpunkt $\mathfrak{A}_2$ des Punktes $\mathfrak{A}_1$ auf der Geraden $|\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1|$ liegen muß; es liegen also

und ebenso
$$\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{A}_2$$
$$\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_2,$$
$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{C}_2$$
auf je einer Geraden; es sind also auch für die drei Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ die Schnittpunkte von den Verbindungslinien je zweier die Tangentialpunkte des dritten. Wir können somit aus einer solchen Gruppe von drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ immer eine neue von gleicher Beschaffenheit ableiten u. s. f. Auch umgekehrt zeigt sich, daß wenn drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ der $C^{(3)}$ die angegebene Eigenschaft besitzen, sie die Projektionen dreier in gerader Linie liegenden Wendepunkte von einem beliebigen Kurvenpunkte aus sein müssen.

Durch einen willkürlich auf der $C^{(3)}$ zu wählenden Punkt $\mathfrak{A}$ sind die beiden übrigen der Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ schon bestimmt, aber mehrdeutig. Verbinden wir nämlich $\mathfrak{A}$ mit dem Wendepunkt $\mathfrak{W}_1$, nennen den dritten Schnittpunkt $\mathfrak{P}_1$ und nehmen die Wendepunktslinie $|\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3|$, so bestimmen $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{W}_2|$ und $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{W}_3|$ die beiden übrigen Punkte $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ der Gruppe.

Wir können aber auch $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{W}_2$ verbinden und erhalten dann den Projektionspunkt $\mathfrak{P}_2$; da wir nun die vier Geraden haben
$$|\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1\mathfrak{P}_1|,\ \mathfrak{B}\mathfrak{W}_2\mathfrak{P}_1|,\ |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_3\mathfrak{P}_1|,\ |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2\mathfrak{P}_2|,$$
so folgt aus den beiden Geraden
$$\begin{array}{l} |\mathfrak{A}\ \mathfrak{W}_2\mathfrak{P}_2| \\ |\mathfrak{P}_1\mathfrak{W}_3\mathfrak{C}\ | \\ \hline |\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_1\quad|, \end{array}$$
die dritte Gerade

und da $\mathfrak{W}_1$ ein Wendepunkt ist, also $|\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_1|$ auf derselben Geraden liegen, daß $|\mathfrak{P}_2\mathfrak{C}|$ durch $\mathfrak{W}_1$ gehen muß; wir haben also die neue Gerade
$$|\mathfrak{C}\mathfrak{W}_1\mathfrak{P}_2|;$$
ferner folgt aus den beiden Geraden
$$\begin{array}{l} |\mathfrak{C}\ \mathfrak{W}_1\mathfrak{P}_2| \\ |\mathfrak{P}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{B}\ | \\ \hline |\mathfrak{W}_3\mathfrak{W}_3\quad| \end{array}$$
die Gerade

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{W}_3\mathfrak{P}_2|;$$

ziehen wir endlich die Verbindungslinie $|\mathfrak{A}\mathfrak{W}_3|$, welche in $\mathfrak{P}_3$ der Kurve begegnen mag, also

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{W}_3\mathfrak{P}_3|$$

so folgen in gleicher Weise die beiden neuen Geraden

$$|\mathfrak{C}\mathfrak{W}_2\mathfrak{P}_3| \text{ und } |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1\mathfrak{P}_3|.$$

Wir haben also folgende eigentümliche Konfiguration von neun Geraden

$$\left\{\begin{array}{lll} |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1\mathfrak{P}_1|, & |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2\mathfrak{P}_2|, & |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_3\mathfrak{P}_3|, \\ |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_2\mathfrak{P}_1|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_3\mathfrak{P}_2|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1\mathfrak{P}_3|, \\ |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_3\mathfrak{P}_1|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_1\mathfrak{P}_2|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_2\mathfrak{P}_3|, \end{array}\right.$$

woraus hervorgeht, daß dieselben Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ von drei verschiedenen Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ aus als die Projektionen der drei in gerader Linie liegenden Wendepunkte auf die Kurve erscheinen, und zwar in cyklischer Reihenfolge; auch bilden die Projektionscentra $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ eine neue Gruppe von gleicher Beschaffenheit, weil sie als die Projektionen derselben Wendepunkte von $\mathfrak{A}$, oder von $\mathfrak{B}$, oder von $\mathfrak{C}$ aus erscheinen.

Aus den drei Geraden

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1\mathfrak{P}_1|,$$
$$|\mathfrak{B}\mathfrak{W}_3\mathfrak{P}_2|,$$
$$|\mathfrak{C}\mathfrak{W}_2\mathfrak{P}_3|$$

geht zugleich hervor, weil $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3$ auf einer Geraden liegen, daß die sechs Punkte der beiden voneinander abhängigen Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ auf einem Kegelschnitt liegen müssen.*

Die sechs Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ liegen derartig auf dem Kegelschnitt, daß die drei Sechsecke

---

* Diese Sätze stammen nach einer Mitteilung von Herrn Durège, „Die ebenen Kurven dritter Ordnung“, S. 288, von Herrn Küpper her.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1\mathfrak{B}\mathfrak{P}_2\mathfrak{C}\mathfrak{P}_3,$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{P}_1\mathfrak{C}\mathfrak{P}_2\mathfrak{A}\mathfrak{P}_3,$$
$$\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}\mathfrak{P}_2\mathfrak{B}\mathfrak{P}_3$$

eine und dieselbe Pascalsche Linie haben, welche dieselben drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten enthält.

5. Wir gingen von einer beliebigen Wendepunktslinie $|\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3|$ dreier in einer Geraden liegenden Wendepunkte aus und fanden durch Projektion derselben von einem beliebigen Kurvenpunkte $\mathfrak{P}$ aus die Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, wobei sich zeigte, daß dieselbe Gruppe auftrat nicht bloß von dem einzigen Punkte $\mathfrak{P}$ aus, sondern von drei verschiedenen Punkten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ aus.

Dieselbe Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ tritt aber auch auf für neue Projektionscentra, wenn wir zwei andere Wendepunktslinien an Stelle der ersten setzen.

Aus dem Zusammenhange zwischen den Wendepunkten $\mathfrak{W}_i^k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ ergeben sich nämlich (§ 28) für die Wendepunktslinie

$$|\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_3^1|$$

und den Projektionspunkt $\mathfrak{P}_1^1$

$$|\mathfrak{P}_1^1\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{A}|,\quad |\mathfrak{P}_1^1\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{P}_1^1\mathfrak{W}_3^1\mathfrak{C}|,$$

drei Gerade mit je drei Punkten. Verbinden wir nun $\mathfrak{A}$ mit einem der übrigen sechs Wendepunkte, z. B. $\mathfrak{W}_1^2$, und nennen den dritten Schnittpunkt $\mathfrak{P}_1^2$, so haben wir die Gerade

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{P}_1^2|.$$

Aus den beiden Geraden

$$\text{folgt}\qquad \begin{array}{c} |\mathfrak{A}\ \mathfrak{W}_1^2\mathfrak{P}_1^2| \\ |\mathfrak{P}_1^1\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{B}\ | \\ \hline |\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_3^3\mathfrak{W}_2^2|. \end{array}$$

Da nun $\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{W}_3^3$ auf einer Geraden und auch $\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{W}_3^3\mathfrak{W}_2^2$ auf einer Geraden liegen, so müssen

$$\mathfrak{P}_1^2\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{B}$$

auf einer Geraden liegen. Ebenso folgt aus den Geraden

$$\begin{array}{c} |\,\mathfrak{A}\ \mathfrak{W}_1^2\,\mathfrak{P}_1^2\,| \\ |\,\mathfrak{P}_1^1\,\mathfrak{W}_3^1\,\mathfrak{C}\ | \\ \hline |\,\mathfrak{W}_1^1\,\mathfrak{W}_2^3\,\mathfrak{W}_3^2\,|, \\ \mathfrak{P}_1^2\,\mathfrak{W}_3^2\,\mathfrak{C} \end{array}$$

daß

auf einer Geraden liegen müssen. Mithin geht die Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ aus den drei in einer Geraden liegenden Wendepunkten $\mathfrak{W}_1^2$, $\mathfrak{W}_2^2$, $\mathfrak{W}_3^2$ hervor durch Projektion von $\mathfrak{P}_1^2$ aus.

Zu den beiden Wendepunktslinien $|\,\mathfrak{W}_1^1\,\mathfrak{W}_2^1\,\mathfrak{W}_3^1\,|$ und $|\,\mathfrak{W}_1^2\,\mathfrak{W}_2^2\,\mathfrak{W}_3^2\,|$ gehört als dritte Seite eines Wendepunktsdreiseits diejenige Gerade, auf welcher die drei übrigen Wendepunkte liegen

$$\mathfrak{W}_1^3,\ \mathfrak{W}_2^3,\ \mathfrak{W}_3^3,$$

und wir erkennen in gleicher Weise, wie vorhin, daß dieselbe Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ auch hervorgeht durch Projektion dieser drei Wendepunkte von einem Punkte $\mathfrak{P}_1^3$ aus, indem je drei Punkte auf der Geraden liegen

$$|\,\mathfrak{P}_1^3\,\mathfrak{W}_1^3\,\mathfrak{A}\,|,\ |\,\mathfrak{P}_1^3\,\mathfrak{W}_2^3\,\mathfrak{B}\,|,\ |\,\mathfrak{P}_1^3\,\mathfrak{W}_3^3\,\mathfrak{C}\,|;$$

wir haben also den Satz:

Dieselbe Gruppe von Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ läßt sich aus drei verschiedenen Wendepunktslinien, welche die Seiten eines Wendepunktsdreiseits bilden, als die Projektion der drei in einer dieser Geraden liegenden Wendepunkte von einem Kurvenpunkte aus ableiten.

Die drei Projektionscentra $\mathfrak{P}_1^1$, $\mathfrak{P}_1^2$, $\mathfrak{P}_1^3$ bilden selbst wieder eine Gruppe von gleicher Beschaffenheit, wie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, weil sie als die Projektionen der drei in gerader Linie liegenden Wendepunkte $\mathfrak{W}_1^1$, $\mathfrak{W}_1^2$, $\mathfrak{W}_1^3$ von $\mathfrak{A}$ aus erscheinen.

Nun haben wir aber für jede dieser Wendepunktslinien nicht nur ein sondern drei Projektionscentra gefunden (4.), sodaß wir im ganzen neun Projektionscentra haben, die wir entsprechend bezeichnen können

$$\mathfrak{P}_1^1\,\mathfrak{P}_2^1\,\mathfrak{P}_3^1,\ \mathfrak{P}_1^2\,\mathfrak{P}_2^2\,\mathfrak{P}_3^2,\ \mathfrak{P}_1^3\,\mathfrak{P}_2^3\,\mathfrak{P}_3^3.$$

Diese sind nichts anderes, als die Projektionen der neun Wendepunkte von $\mathfrak{A}$ aus auf die $C^{(3)}$, oder auch von $\mathfrak{B}$ aus,

oder von $\mathfrak{C}$ aus, aber in cyklischer Folge, sodaß wir die Geraden haben

$$
\begin{array}{lll}
|\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{P}_1^1|, & |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{P}_2^1|, & |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_3^1\mathfrak{P}_3^1|, \\
|\mathfrak{B}\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{P}_1^1|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_3^1\mathfrak{P}_2^1|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{P}_3^1|, \\
|\mathfrak{C}\mathfrak{W}_3^1\mathfrak{P}_1^1|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_1^1\mathfrak{P}_2^1|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_2^1\mathfrak{P}_3^1|;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
|\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{P}_1^2|, & |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{P}_2^2|, & |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_3^2\mathfrak{P}_3^2|, \\
|\mathfrak{B}\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{P}_1^2|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_3^2\mathfrak{P}_2^2|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{P}_3^2|, \\
|\mathfrak{C}\mathfrak{W}_3^2\mathfrak{P}_1^2|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_1^2\mathfrak{P}_2^2|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_2^2\mathfrak{P}_3^2|;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
|\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1^3\mathfrak{P}_1^3|, & |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2^3\mathfrak{P}_2^3|, & |\mathfrak{A}\mathfrak{W}_3^3\mathfrak{P}_3^3|, \\
|\mathfrak{B}\mathfrak{W}_2^3\mathfrak{P}_1^3|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_3^3\mathfrak{P}_2^3|, & |\mathfrak{B}\mathfrak{W}_1^3\mathfrak{P}_3^3|, \\
|\mathfrak{C}\mathfrak{W}_3^3\mathfrak{P}_1^3|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_1^3\mathfrak{P}_2^3|, & |\mathfrak{C}\mathfrak{W}_2^3\mathfrak{P}_3^3|.
\end{array}
$$

Die neun Projektionscentra $\mathfrak{P}_i^k$ $(i, k = 1, 2, 3)$, für deren jedes die Gruppe von Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ als die Projektionen von drei in gerader Linie liegenden Wendepunkten erscheint, bilden selbst wieder unter sich Gruppen zu je dreien von gleicher Beschaffenheit, und zwar gehört jeder dieser Punkte vier solchen Gruppen an, z. B.

$$\mathfrak{P}_1^1\mathfrak{P}_2^1\mathfrak{P}_3^1, \quad \mathfrak{P}_1^1\mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_1^3, \quad \mathfrak{P}_1^1\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{P}_3^3, \quad \mathfrak{P}_1^1\mathfrak{P}_2^3\mathfrak{P}_3^2;$$

die übrigen Gruppen sind, wie sich unmittelbar aus der Lage der Wendepunkte (§ 28) ergiebt, der analog sie zu bilden sind, folgende

$$
\begin{array}{llll}
\mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{P}_3^2, & \mathfrak{P}_2^1\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{P}_2^3, & \mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2^3\mathfrak{P}_3^1, & \mathfrak{P}_1^3\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{P}_3^1, \\
\mathfrak{P}_1^3\mathfrak{P}_2^3\mathfrak{P}_3^3, & \mathfrak{P}_3^1\mathfrak{P}_3^2\mathfrak{P}_3^3, & \mathfrak{P}_1^3\mathfrak{P}_2^1\mathfrak{P}_3^2, & \mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2^1\mathfrak{P}_3^3.
\end{array}
$$

6. Das gewonnene Resultat sagt aus, daß wenn wir die neun Wendepunkte $\mathfrak{W}_i^k$ von einem Punkte $\mathfrak{A}$ der Kurve aus auf dieselbe projicieren, die dadurch erhaltenen neun Punkte $\mathfrak{P}_i^k$ sich auf zwölf Arten zu je dreien einer Gruppe vereinigen, welche dieselbe Eigenschaft besitzt, wie die ursprüngliche Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, daß immer vier solche Gruppen einen Punkt gemein haben und daß dieselben Punkte $\mathfrak{P}_i^k$ hervorgehen, wenn wir von $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ aus die Wendepunkte auf die Kurve projicieren.

Wir können jetzt auch umgekehrt, anstatt von $\mathfrak{A}$ auszugehen, von $\mathfrak{P}_1^1$ ausgehen und finden dann nicht nur die

eine Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, sondern dazu noch zwei andere, also im ganzen neun Punkte, die sich wiederum wie die $\mathfrak{P}$ zu je dreien in zwölf Gruppen ordnen, von denen immer vier einen Punkt gemein haben; führen wir zur deutlicheren Übersicht eine etwas veränderte Bezeichnung ein, indem wir

$$\text{statt } \mathfrak{A} \ldots \mathfrak{A}^1_1, \quad \text{statt } \mathfrak{B} \ldots \mathfrak{A}^1_2, \quad \text{statt } \mathfrak{C} \ldots \mathfrak{A}^1_3$$

setzen und die übrigen sechs Punkte als dritte Schnittpunkte der Verbindungslinien erhalten

$$|\mathfrak{P}^1_1\mathfrak{W}^2_1\mathfrak{A}^2_1|, \quad |\mathfrak{P}^1_1\mathfrak{W}^2_2\mathfrak{A}^2_2|, \quad |\mathfrak{P}^1_1\mathfrak{W}^2_3\mathfrak{A}^2_3|,$$
$$|\mathfrak{P}^1_1\mathfrak{W}^3_1\mathfrak{A}^3_1|, \quad |\mathfrak{P}^1_1\mathfrak{W}^3_2\mathfrak{A}^3_2|, \quad |\mathfrak{P}^1_1\mathfrak{W}^3_3\mathfrak{A}^3_3|,$$

so läßt sich erkennen, durch welche von den Wendepunkten die 81 Verbindungslinien der Punkte

$$\mathfrak{A}^n_m \text{ und } \mathfrak{P}^k_i \; (m, n = 1, 2, 3; \; i, k = 1, 2, 3)$$

hindurchgehen müssen aus folgender Tabelle

	$\mathfrak{P}^1_1$	$\mathfrak{P}^1_2$	$\mathfrak{P}^1_3$	$\mathfrak{P}^2_1$	$\mathfrak{P}^2_2$	$\mathfrak{P}^2_3$	$\mathfrak{P}^3_1$	$\mathfrak{P}^3_2$	$\mathfrak{P}^3_3$
$\mathfrak{A}^1_1$	$\mathfrak{W}^1_1$	$\mathfrak{W}^1_2$	$\mathfrak{W}^1_3$	$\mathfrak{W}^2_1$	$\mathfrak{W}^2_2$	$\mathfrak{W}^2_3$	$\mathfrak{W}^3_1$	$\mathfrak{W}^3_2$	$\mathfrak{W}^3_3$
$\mathfrak{A}^1_2$	$\mathfrak{W}^1_2$	$\mathfrak{W}^1_3$	$\mathfrak{W}^1_1$	$\mathfrak{W}^2_2$	$\mathfrak{W}^2_3$	$\mathfrak{W}^2_1$	$\mathfrak{W}^3_2$	$\mathfrak{W}^3_3$	$\mathfrak{W}^3_1$
$\mathfrak{A}^1_3$	$\mathfrak{W}^1_3$	$\mathfrak{W}^1_1$	$\mathfrak{W}^1_2$	$\mathfrak{W}^2_3$	$\mathfrak{W}^2_1$	$\mathfrak{W}^2_2$	$\mathfrak{W}^3_3$	$\mathfrak{W}^3_1$	$\mathfrak{W}^3_2$
$\mathfrak{A}^2_1$	$\mathfrak{W}^2_1$	$\mathfrak{W}^2_2$	$\mathfrak{W}^2_3$	$\mathfrak{W}^3_1$	$\mathfrak{W}^3_2$	$\mathfrak{W}^3_3$	$\mathfrak{W}^1_1$	$\mathfrak{W}^1_2$	$\mathfrak{W}^1_3$
$\mathfrak{A}^2_2$	$\mathfrak{W}^2_2$	$\mathfrak{W}^2_3$	$\mathfrak{W}^2_1$	$\mathfrak{W}^3_2$	$\mathfrak{W}^3_3$	$\mathfrak{W}^3_1$	$\mathfrak{W}^1_2$	$\mathfrak{W}^1_3$	$\mathfrak{W}^1_1$
$\mathfrak{A}^2_3$	$\mathfrak{W}^2_3$	$\mathfrak{W}^2_1$	$\mathfrak{W}^2_2$	$\mathfrak{W}^3_3$	$\mathfrak{W}^3_1$	$\mathfrak{W}^3_2$	$\mathfrak{W}^1_3$	$\mathfrak{W}^1_1$	$\mathfrak{W}^1_2$
$\mathfrak{A}^3_1$	$\mathfrak{W}^3_1$	$\mathfrak{W}^3_2$	$\mathfrak{W}^3_3$	$\mathfrak{W}^1_1$	$\mathfrak{W}^1_2$	$\mathfrak{W}^1_3$	$\mathfrak{W}^2_1$	$\mathfrak{W}^2_2$	$\mathfrak{W}^2_3$
$\mathfrak{A}^3_2$	$\mathfrak{W}^3_2$	$\mathfrak{W}^3_3$	$\mathfrak{W}^3_1$	$\mathfrak{W}^1_2$	$\mathfrak{W}^1_3$	$\mathfrak{W}^1_1$	$\mathfrak{W}^2_2$	$\mathfrak{W}^2_3$	$\mathfrak{W}^2_1$
$\mathfrak{A}^3_3$	$\mathfrak{W}^3_3$	$\mathfrak{W}^3_1$	$\mathfrak{W}^3_2$	$\mathfrak{W}^1_3$	$\mathfrak{W}^1_1$	$\mathfrak{W}^1_2$	$\mathfrak{W}^2_3$	$\mathfrak{W}^2_1$	$\mathfrak{W}^2_2$

Um den Wendepunkt zu ermitteln, durch welchen die Verbindungslinie von $\mathfrak{P}^k_i$ mit $\mathfrak{A}^n_m$ hindurchgeht, suchen wir den in der Vertikalreihe $\mathfrak{P}^k_i$ und in der Horizontalreihe $\mathfrak{A}^n_m$ stehenden Buchstaben auf. In jeder Vertikalreihe und in jeder Horizontalreihe stehen sämtliche Wendepunkte, nur in anderer Anordnung; die 81 Verbindungslinien $|\mathfrak{P}^k_i\mathfrak{A}^n_m|$ schneiden sich also zu je neun in den neun Wendepunkten.



Nimmt man von den sämtlichen in einer beliebigen Vertikalreihe stehenden Wendepunkten drei solche heraus, welche in einer Geraden (Wendepunktslinie) liegen und projiciert sie von dem über der Vertikalreihe stehenden Punkte $\mathfrak{P}$ aus, so erhält man die drei vor den entsprechenden Horizontalreihen stehenden Punkte $\mathfrak{A}$, welche eine Gruppe bilden von der Beschaffenheit, wie die besprochene Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Durch *einen* der neun Punkte $\mathfrak{A}_i^k$ sind die übrigen acht vollständig und eindeutig bestimmt.

7. Die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ einer Gruppe, welche als die Projektionen dreier in gerader Linie liegenden Wendepunkte von einem Kurvenpunkte aus erscheinen, und welche gleichzeitig, wie wir gesehen haben (4.), die Eigenschaft besitzen, daß der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{A}$ auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{B}$ auf $|\mathfrak{C}\mathfrak{A}|$ und der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{C}$ auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ liegt, besitzen noch eine weitere Eigenschaft. Schneidet nämlich irgend ein in $\mathfrak{A}$ dreipunktig berührender Kegelschnitt die $C^{(3)}$ außerdem in den drei Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, so wird das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}]$ zum Gegenpunkt den Tangentialpunkt $\mathfrak{A}_1$ zu $\mathfrak{A}$ haben, weil die sechs Punkte $[\mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ auf einem Kegelschnitt liegen. Da aber $\mathfrak{A}_1$ auch auf $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ liegt, so müssen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ auf einem Kegelschnitt liegen; das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{B}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}]$ wird also zum Gegenpunkt den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ mit der Kurve haben, d. h. den Punkt $\mathfrak{B}_1$, welcher Tangentialpunkt zu $\mathfrak{B}$ ist. Hieraus folgt, daß auch die sechs Punkte $\mathfrak{B}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}$ auf einem Kegelschnitt liegen müssen, oder was dasselbe sagt, daß es einen zweiten Kegelschnitt durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ giebt, welcher in $\mathfrak{B}$ dreipunktig berührt, und einen dritten, welcher in $\mathfrak{C}$ dreipunktig berührt, also:

Bilden die Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ eine solche Gruppe von Punkten auf der $C^{(3)}$, welche als die Projektionen dreier in gerader Linie liegenden Wendepunkte von einem Kurvenpunkte aus erscheinen, und legt man durch $\mathfrak{A}$ einen dreipunktig berührenden Kegelschnitt, welcher außerdem in $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ der $C^{(3)}$ begegnet, dann giebt es durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ noch einen zweiten Kegel-

schnitt, welcher in $\mathfrak{B}$, und einen dritten, welcher in $\mathfrak{C}$ die Kurve dreipunktig berührt.

Wir können jetzt die Frage umkehren und durch drei gegebene Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ einen solchen Kegelschnitt zu legen versuchen, welcher außerdem die $C^{(3)}$ noch in einem andern Punkte dreipunktig berührt. Hätten wir einen solchen Punkt $\mathfrak{A}$ gefunden, welcher die Eigenschaft besäße, daß ein durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ gelegter Kegelschnitt in $\mathfrak{A}$ die Kurve dreipunktig berührte, so könnten wir aus $\mathfrak{A}$ noch andere Punkte von gleicher Beschaffenheit ermitteln; denn wäre $\mathfrak{B}$ ein gesuchter zweiter Punkt von derselben Beschaffenheit, so müßte wegen des Kegelschnitts $[\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}]$ zu dem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $[\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\mathfrak{A}]$ der Gegenpunkt $\mathfrak{A}_1$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{A}$ sein, und ebenso zu dem Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $[\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\mathfrak{B}]$ der Gegenpunkt $\mathfrak{B}_1$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{B}$ sein. Legt man aber den beiden Büscheln angehörigen Kegelschnitt durch die fünf Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, welcher noch in einem sechsten Punkte $\mathfrak{C}$ der Kurve begegnet, so müßte $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ durch $\mathfrak{A}_1$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ durch $\mathfrak{B}_1$ gehen. Hieraus folgt aber, wenn $\mathfrak{C}_1$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{C}$ ist, daß auch $\mathfrak{C}_1$ auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ liegen muß; denn aus den vier Geraden

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1|$$

folgt, wenn wir die beiden zusammenstellen

$$\begin{array}{c} |\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}| \\ |\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{B}| \\ \hline |\mathfrak{C}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{C}_1|, \end{array}$$

d. h. wenn $\mathfrak{C}_1$ der Tangentialpunkt zu $\mathfrak{C}$ ist, so muß $\mathfrak{C}_1$ auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ liegen. Die drei Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ besitzen also die Eigenschaft, daß der Tangentialpunkt eines jeden von ihnen auf der Verbindungslinie der beiden übrigen liegt; sie bilden daher eine solche Gruppe, welche als Projektionen dreier in gerader Linie liegenden Wendepunkte von einem Kurvenpunkte aus erscheinen. Da nun $\mathfrak{A}$ die Eigenschaft besitzt, daß ein durch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gehender Kegelschnitt die

Kurve in $\mathfrak{A}$ dreipunktig berührt, so müssen nach dem vorigen Satze auch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die gleiche Eigenschaft besitzen.

Die vorgelegte Frage läuft jetzt also darauf hinaus, wie viele solcher Paare von Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ es giebt, die mit $\mathfrak{A}$ zusammen eine Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ von der angegebenen Eigenschaft bilden. Diese Frage beantwortet aber die Tabelle in 6., denn sie zeigt, daß es mit dem gemeinsamen Punkt $\mathfrak{A}_1^1$ vier solche Gruppen giebt

$$\mathfrak{A}_1^1 \mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{A}_1^3,$$
$$\mathfrak{A}_1^1 \mathfrak{A}_2^1 \mathfrak{A}_3^1,$$
$$\mathfrak{A}_1^1 \mathfrak{A}_2^3 \mathfrak{A}_3^2,$$
$$\mathfrak{A}_1^1 \mathfrak{A}_2^2 \mathfrak{A}_3^3,$$

mithin im Ganzen neun solcher Punkte, wir schließen also:

Durch drei willkürlich zu wählende Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ einer $C^{(3)}$ giebt es im allgemeinen neun Kegelschnitte, welche die $C^{(3)}$ außerdem noch in je einem Punkte dreipunktig berühren. Die neun Berührungspunkte dieser Kegelschnitte erscheinen als die Projektionen der neun Wendepunkte der $C^{(3)}$ von einem gewissen Kurvenpunkte $\mathfrak{P}_i^k$ aus, und es giebt neun solcher Kurvenpunkte, welche dieselben neun Berührungspunkte liefern. Durch einen dieser Berührungspunkte sind die übrigen acht vollständig bestimmt.

(Da von den neun Wendepunkten drei reell und sechs imaginär sind, so sind auch von den neun Kegelschnitten drei reell und sechs imaginär.)

Da wir oben gesehen haben, dass die drei gegebenen Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ allemal mit den drei Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ einer Gruppe auf einem Kegelschnitte liegen, und da sich die neun Berührungspunkte $\mathfrak{A}_i^k$ in zwölf solcher Gruppen, entsprechend den zwölf Wendepunktslinien ordnen lassen (ebenso wie oben 5. die neun Punkte $\mathfrak{P}_i^k$), so folgt:

Die neun Berührungspunkte der vorigen neun Kegelschnitte liegen zu je dreien mit den gegebenen Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ auf zwölf Kegelschnitten, und

diese gruppieren sich auf vier verschiedene Arten zu je drei Kegelschnitten, welche zusammen alle neun Berührungspunkte enthalten.

Dies entspricht den vier Wendepunktsdreiseiten, deren jedes alle neun Wendepunkte enthält; auch zeigt sich, weil von den zwölf Wendepunktslinien vier reell und acht imaginär sind, daß von den letzten zwölf Kegelschnitten vier reell und acht imaginär sein werden.

Ist $\mathfrak{A}$ der Berührungspunkt eines durch $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ gehenden und in $\mathfrak{A}$ dreipunktig berührenden Kegelschnitts, so müssen offenbar die drei Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{P}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{Q}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{R}|$ die $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten treffen, welche auf einer Geraden liegen, weil die sechs Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}$ auf einem Kegelschnitt sich befinden. Die vorliegende Aufgabe läßt sich also auch so fassen:

„Drei auf der $C^{(3)}$ gegebene Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ von einem gesuchten Punkte der Kurve aus so auf dieselbe zu projicieren, daß die drei erhaltenen Punkte auf einer Geraden liegen.“

Diese Aufgabe hat also die neun Lösungen $\mathfrak{A}_i^k$, welche wir vorhin ermittelt haben.

8. Wenn wir von den neun Lösungen $\mathfrak{A}_i^k$ des Problems drei solche herausnehmen, welche eine Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ bilden, d. h. als die drei Projektionen dreier in gerader Linie liegenden Wendepunkte von einem Kurvenpunkte aus erscheinen, so liegen, wie wir gesehen haben, die sechs Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ auf einem Kegelschnitt. Da das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{P}]$ zum Gegenpunkt den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{Q}\mathfrak{R}|$ mit der $C^{(3)}$ hat, welcher $\mathfrak{P}_1$ genannt werde, so muß auch, wenn wir durch $\mathfrak{P}_1$ eine beliebige andere Gerade $|\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1|$ ziehen, ein Kegelschnitt des Büschels durch $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{R}_1$ gehen; also die sechs Punkte

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{R}_1$$

müssen auf einem Kegelschnitt liegen.

Hieraus folgt wieder, daß das Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1\mathfrak{A}]$ zum Gegenpunkt den dritten Schnittpunkt von $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ mit der Kurve haben muß. Dieser dritte Schnitt-



Verbesserungen.

Seite 9 Zeile 8 v. u.: Das Wort „noch“ ist zu streichen.
„ 15 „ 7 „ u.: Statt „Stahlenpaar“ lies „Strahlenpaar“.
„ 20 „ 4 „ u.: Statt „$\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1$“ lies $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$.
„ 28 „ 1 „ o.: Das Wort „schnitte“ ist zu streichen.
„ 38 „ 1 „ o.: Statt $\mathfrak{T}_1$ lies $\mathfrak{T}'$.
„ 45 „ 10 „ u.: Statt z lies $\mathfrak{z}$.
„ 48 „ 16 „ o.: Statt $\mathfrak{T}_1$ lies $\mathfrak{T}$.
„ 50 „ 15 „ u.: Statt $B_1^{(3)}$ lies $B_1^{(3)}$.
„ 62 „ 12 „ u.: Die Silbe „un-“ ist zu streichen.
„ 100 „ 3 „ u.: Statt $\mathfrak{V}$ lies $\mathfrak{B}$.
„ 123 „ 5 „ u.: Statt „posititiv“ lies „positiv“.
„ 124 „ 10 „ o.: Statt a_1 lies a.
„ 142 „ 10 „ u.: Hinter „reellen“ ergänze „unendlich entfernten“.
„ 167 „ 5 „ o.: Statt $- - -$ lies $- + -$.
„ 167 „ 13 „ u.: Statt „entpricht“ lies „entspricht“.
„ 183 „ 7 „ o.: Ergänze 2.
„ 225 „ 1 „ u.: Statt $C^{(3)}$ lies $H^{(3)}$.
„ 246 „ 16 „ o.: Statt „eine“ lies „einer“.
„ 271 „ 1 „ o.: Statt $\mathfrak{P}_{m-1}$ lies $\mathfrak{P}_{m-2}$.